ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 62)

วันอาทิตย์ที่ 24 พฤศจิกายน 2562 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ S เป็นเซตของประพจน์ทั้งหมด นิยาม $f : S \to \{0, 1\}$ โดยกำหนดให้สำหรับประพจน์ s ใดๆ

$$f(s) = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } s \text{ มีค่าความจริงเป็นจริง} \\ 0 \text{ เมื่อ } s \text{ มีค่าความจริงเป็นเท็จ} \end{cases}$$

ถ้าประพจน์ p, q และ r สอดคล้องเงื่อนไข $f(p \vee q \vee r) = f(p)f(q)f(r)$ และ $f(p \wedge \sim q) = f(q)$

จงหาค่าของ $\frac{f(r)+f(\sim p)}{2} + f\big((\sim p) \to [q \to (r \wedge p)]\big)$

2. จำหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\log_{10}(2^x + x - 17) = x - x\log_{10} 5$

3. กำหนดให้วงรี $4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{3}y^2 = 1$

แนบในสามเหลี่ยม ABC โดยที่ จุดยอด A, B และ C อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$

ถ้าจุดยอด A มีพิกัดเป็น $(1, 0)$ แล้ว วงรีนี้สัมผัสสามเหลี่ยม ABC ที่จุดใดบ้าง

4. กำหนดให้คำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมดของสมการ $\tan x = x$ ถูกแทนด้วยลำดับเพิ่มแท้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$

5. สำหรับความสัมพันธ์ r บน A ใดๆ เรียก r ว่าความสัมพันธ์**สมมูล** ถ้า r มีสมบัติทุกข้อดังต่อไปนี้

(i) $(a, a) \in r$ ทุก $a \in A$

(ii) ถ้า $(a, b) \in r$ แล้ว $(b, a) \in r$

(iii) ถ้า $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in r$ แล้ว $(a, c) \in r$

จงหาจำนวนของความสัมพันธ์สมมูลทั้งหมดบนเซต $A = \{1, 2, 3\}$

6. สุ่มหยิบจำนวนมาหนึ่งจำนวนจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 999, 1000\}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนที่สุ่มมานี้มีผลบวกของเลขโดดทั้งหมดเท่ากับ 8

7. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่ง $|\vec{b}| = \sqrt{673}$ และ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2019$
จงหาจำนวนจริง λ ทั้งหมดซึ่งทำให้มีเวกเตอร์ $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ $\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$

8. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2019 โดยที่ $P(1) = P(2) = \dots = P(2019) = 1$ และ $P(2020) = 2$
จงหาจำนวนเต็มบวก r ที่ทำให้ $P(2019 + r) = 2019 + r$

9. จำนวนเชิงซ้อน z และ w สอดคล้องอสมการ $|z - 1 + 3i| \leq 1$ และ $|w - 4 - i| \leq 1$
จงหาค่าต่ำสุดของ $|z - w|$

10. จงหาจำนวนจริง x_0 ทั้งหมดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

11. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ และให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง t ทั้งหมดที่ทำให้

$$t^3 A \,\mathrm{adj}\left(A - \frac{1}{t}I\right) = \mathrm{adj}(tA - I)$$

ในที่นี้ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 จงหาผลรวมของสมาชิกทั้งหมดใน S

12. สำหรับจำนวนจริง a กำหนดให้ $\lfloor a \rfloor$ เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ a จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\lfloor x^2 - 3x + 2 \rfloor = 3x - 7$

13. มีฉลากอยู่ $n+1$ ใบอยู่ในกล่องใบหนึ่ง ฉลากแต่ละใบมีหมายเลข $0, 1, 2, \ldots, n$ กำกับอยู่ สุ่มหยิบฉลากมาครั้งละ 1 ใบ 4 ครั้ง แบบ**หยิบแล้วใส่คืน** ถ้าความน่าจะเป็นที่ผลบวกของเลขบนฉลากที่หยิบได้ในสองครั้งแรก และสองครั้งหลังมีค่าเท่ากัน มีค่าเท่ากับ $\frac{an^2+bn+c}{(n+1)^3}$ จงหาค่าของ a, b และ c

14. กำหนดให้ $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ โดยที่ $f(x) = g(x)\,h(x)$ และ $h(x) > 0$ ทุก $x \in \mathbb{R}$
ถ้าสมมติว่า $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{2562}$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$
$f(7) = 8$ และ $g'(7) = 4$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{h'(7)}{\left(h(7)\right)^2}$

15. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a < b < c$ และ $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}\right) = 16$
จงหาค่าของ $ac - b^2$

16. จงหาคู่อันดับ (m, n) มาหนึ่งคู่อันดับโดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ต่างกันซึ่งทำให้ $\frac{2}{109} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

17. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$

18. จงหาค่าสูงสุดของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม 1 หรือ -1 เท่านั้น

19. เกมเดินหมุดทอดลูกเต๋า มีกติกาคือ ให้เดินหมุดไปทีละช่อง ตามจำนวนที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 6 หน้าหนึ่งครึ่ง โดยเมื่อเริ่มต้นเกม ให้หมุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 0 และเกมจบลงเมื่อหมุดมาหยุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 7 หาก ตำแหน่งรวมเกิน 7 ให้เดินหมุดย้อนกลับหลัง เช่น ถ้าหมุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 4 และทอดลูกเต๋าได้ตัวเลข 5 เมื่อเดินเสร็จสิ้น หมุดจะมาอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 5

0	1	2	3	4	5	6	7

จงหาความน่าจะเป็นที่เกมจะจบลงภายใน 5 ตา

20. จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = \sum_{k=0}^{2562} (k - 2562x)^2 \binom{2562}{k} x^k (1-x)^{2562-k}$

<u>ตอนที่ 3</u> มี 5 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน

21. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ จุด E และ F แบ่ง AD ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน ดังนี้ $|AE| = |EF| = |FD|$ ถ้า $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$ และ $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$ แล้ว จงหาค่าของ $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CA}\right|^2$

22. จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} \frac{1^{15}+3^{15}+5^{15}+\cdots+(2n-1)^{15}}{n^{16}}$

23. สำหรับเมทริกซ์ X, Y และ Z ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด $n \times n$ จะกล่าวว่า

X, Y, Z เป็น**อิสระเชิงเส้นต่อกัน** ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริง a, b, c ถ้า $aX + bY + cZ = 0$ แล้ว

$a = b = c = 0$

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด $n \times n$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และ

สอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} AB - BA &= A + B \\ AC - CA &= \alpha A + C \\ BC - CB &= B + \beta C \end{aligned}$$

เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริง จงหาค่า α และ β

24. จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ $\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9}-1}\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{27}}{2\cos\frac{2\pi}{27}-1}\right)+\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{81}}{2\cos\frac{2\pi}{81}-1}\right)+\ldots$

25. กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน a, b และ c เป็นรากของพหุนาม $p(z) = z^3 + 21z - 2562$
ให้ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมในระนาบเชิงซ้อนที่มีจุดยอดอยู่ที่ a, b และ c ตามลำดับ และ
ให้ ε เป็นวงรีที่แนบในสามเหลี่ยม ABC และสัมผัสกับจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC
ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 เป็นโฟกัสของวงรี ε แล้ว จงหาค่าของ $z_1^2 + z_2^2$

<u>เฉลย</u>

1. 1.5
2. 17
3. $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{7}{12}, \pm\frac{\sqrt{15}}{12}\right)$
4. π
5. 5
6. 0.045
7. 3
8. 2
9. 3
10. $\frac{1}{3}$, 1
11. $\frac{17}{12}$
12. $\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}$
13. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1$
14. -0.5
15. -4
16. $(55, 5995)$
17. 16
18. 4
19. $\frac{671}{1296}$
20. 640.5
21. 21
22. 2048
23. $1, -1$
24. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
25. -14

<u>แนวคิด</u>

1. กำหนดให้ S เป็นเซตของประพจน์ทั้งหมด นิยาม $f : S \to \{0, 1\}$ โดยกำหนดให้สำหรับประพจน์ s ใดๆ

$$f(s) = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } s \text{ มีค่าความจริงเป็นจริง} \\ 0 \text{ เมื่อ } s \text{ มีค่าความจริงเป็นเท็จ} \end{cases}$$

ถ้าประพจน์ p, q และ r สอดคล้องเงื่อนไข $f(p \vee q \vee r) = f(p)f(q)f(r)$ และ $f(p \wedge {\sim}q) = f(q)$

จงหาค่าของ $\frac{f(r)+f({\sim}p)}{2} + f\big(({\sim}p) \to [q \to (r \wedge p)]\big)$

<u>ตอบ</u> 1.5

เนื่องจาก f จะได้ผลลัพธ์เป็น 0 หรือ 1 ดังนั้น $f(p)f(q)f(r)$ คือการคูณกันของ 0 หรือ 1

ซึ่งผลคูณนี้ จะเป็น 1 เมื่อ ทุกตัวเป็น 1 และจะเป็น 0 เมื่อมีตัวใดตัวหนึ่งเป็น 0

จะตรงกับการ “และ” ที่เป็นจริงเมื่อทุกตัวเป็นจริง และเป็นเท็จเมื่อมีตัวใดตัวหนึ่งเป็นเท็จ

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f(p)f(q)f(r) &= f(p \wedge q \wedge r) \\ f(p \vee q \vee r) &= f(p \wedge q \wedge r) \\ p \vee q \vee r &\equiv p \wedge q \wedge r \end{aligned}$$

โจทย์กำหนด

f จับคู่ จริง $\to 1$ และ เท็จ $\to 0$ แบบ 1 ต่อ 1

จะเห็นว่า $p \vee q \vee r$ สมมูลกับ $p \wedge q \wedge r$ ได้ 2 แบบ คือ p, q, r เป็นจริงทุกตัว กับ p, q, r เป็นเท็จทุกตัว

โจทย์กำหนดให้ $f(p \wedge {\sim}q) = f(q)$ $\to$ จะลองแทนทั้งสองแบบ แล้วดูว่าใช้ได้หรือไม่

กรณี p, q, r เป็นจริงทุกตัว
$$\begin{aligned} f(\mathrm{T} \wedge {\sim}\mathrm{T}) &= f(\mathrm{T}) \\ f(\quad \mathrm{F} \quad) &= f(\mathrm{T}) \\ 0 &= 1 \quad ✕ \end{aligned}$$

กรณี p, q, r เป็นเท็จทุกตัว
$$\begin{aligned} f(\mathrm{F} \wedge {\sim}\mathrm{F}) &= f(\mathrm{F}) \\ f(\quad \mathrm{F} \quad) &= f(\mathrm{F}) \\ 0 &= 0 \quad ✓ \end{aligned}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า p, q, r เป็นเท็จทุกตัว

แทนในค่าที่โจทย์ถามจะได้
$$\begin{aligned} &\frac{f(\mathrm{F})+f({\sim}\mathrm{F})}{2} + f\big(({\sim}\mathrm{F}) \to [\mathrm{F} \to (\mathrm{F} \wedge \mathrm{F})]\big) \\ =\ &\frac{f(\mathrm{F})+f(\mathrm{T})}{2} + f(\ \mathrm{T} \quad \to [\quad \mathrm{T} \qquad]) \\ =\ &\frac{f(\mathrm{F})+f(\mathrm{T})}{2} + f(\qquad \mathrm{T} \qquad) \\ =\ &\frac{0+1}{2} + 1 = 1.5 \end{aligned}$$

2. จำหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\log_{10}(2^x+x-17) = x - x\log_{10}5$

<u>ตอบ</u> 17

$$\begin{aligned}
\log_{10}(2^x+x-17) &= x - x\log_{10}5 \\
\log_{10}(2^x+x-17) &= x(1-\log_{10}5) \\
\log_{10}(2^x+x-17) &= x(\log_{10}10-\log_{10}5) \\
\log_{10}(2^x+x-17) &= x\left(\log_{10}\frac{10}{5}\right) \\
\log_{10}(2^x+x-17) &= x(\log_{10}2) \\
2^x+x-17 &= 10^{x\,(\log_{10}2)} \\
2^x+x-17 &= \left(10^{\log_{10}2}\right)^x \\
2^x+x-17 &= (\quad 2 \quad)^x \\
x &= 17
\end{aligned}$$

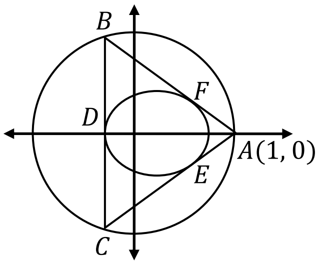
จะเห็นว่า $x = 17$ ทำให้ค่า 2^x+x-17 ที่อยู่หลัง $\log$ เป็นบวก จึงเป็นคำตอบได้

3. กำหนดให้วงรี $4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{16}{3}y^2 = 1$

แนบในสามเหลี่ยม ABC โดยที่ จุดยอด A, B และ C อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2+y^2 = 1$

ถ้าจุดยอด A มีพิกัดเป็น $(1, 0)$ แล้ว วงรีนี้สัมผัสสามเหลี่ยม ABC ที่จุดใดบ้าง

<u>ตอบ</u> $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{7}{12}, \pm\frac{\sqrt{15}}{12}\right)$



จัดรูปวงรี จะได้ $4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{16}{3}y^2 = 1$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1$$

นำวงรีไปวาดร่วมกับวงกลมหนึ่งหน่วย

กำหนดให้วงรีสัมผัสสามเหลี่ยม ABC ที่จุด D, E, F จะวาดได้ดังรูป

จุด D คือจุดยอดวงรีฝั่งซ้าย $\rightarrow$ จะมีพิกัดคือ $D\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}, 0\right) = D\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

B กับ D อยู่ในแนวตั้งเดียวกัน จะมีพิกัด x เท่ากัน $\rightarrow$ จะได้พิกัด x ของจุด $B = -\frac{1}{4}$ ด้วย

B อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย $\rightarrow$ แทน $x = -\frac{1}{4}$ ในสมการวงกลมหนึ่งหน่วย เพื่อหาพิกัด y :

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 1 \\
\left(-\frac{1}{4}\right)^2+y^2 &= 1 \\
y &= \pm\frac{\sqrt{15}}{4}
\end{aligned}$$

แต่ B อยู่ใน Q_2 $\rightarrow$ จะได้พิกัด B คือ $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

จุด $F(a, b)$ อยู่บนแนวเส้นตรง $A(1, 0)$ และ $B\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{b-0}{a-1} &= \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}-0}{-\frac{1}{4}-1} \\
b &= -\frac{\sqrt{15}}{5}(a-1) \quad \ldots(*)
\end{aligned}$$

และ $F(a, b)$ อยู่บนวงรี

$$\begin{aligned}
4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{16}{3}y^2 &= 1 \\
4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{16}{3}b^2 &= 1 \\
4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{16}{3}\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}(a-1)\right)^2 &= 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4\left(a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)+\frac{16}{5}(a^2-2a+1) &= 1 \\
80a^2-40a+5+64a^2-128a+64 &= 20 \\
144a^2-168a+49 &= 0 \\
(12a-7)^2 &= 0 \\
a &= \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

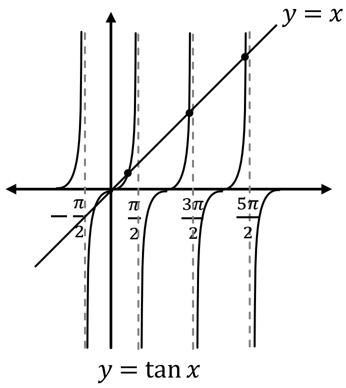
คูณ 20 ตลอด

แทนใน $(*)$ จะได้ $b = -\frac{\sqrt{15}}{5}\left(\frac{7}{12}-1\right) = \frac{\sqrt{15}}{12}$ $\rightarrow$ จะได้พิกัด F คือ $\left(\frac{7}{12},\frac{\sqrt{15}}{12}\right)$

และจากความสมมาตร จะได้พิกัด E คือ $\left(\frac{7}{12},-\frac{\sqrt{15}}{12}\right)$

4. กำหนดให้คำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมดของสมการ $\tan x = x$ ถูกแทนด้วยลำดับเพิ่มแท้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$

<u>ตอบ</u> π



จะหาคำตอบของสมการ $\tan x = x$

โดยการวาดกราฟ $y = \tan x$ และ $y = x$ บนแกนคู่เดียวกัน

แล้วดูว่ากราฟตัดกันตรงไหน ดังรูป

จะเห็นว่าจุดตัดของกราฟทั้งสอง เข้าใกล้เส้นกำกับ $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ ขึ้นเรื่อยๆ

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \frac{(2(n+1)+1)\pi}{2} - \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{2n\pi+3\pi-2n\pi-\pi}{2} = \pi$

5. สำหรับความสัมพันธ์ r บน A ใดๆ เรียก r ว่าความสัมพันธ์**สมมูล** ถ้า r มีสมบัติทุกข้อดังต่อไปนี้

(i) $(a,a) \in r$ ทุก $a \in A$

(ii) ถ้า $(a,b) \in r$ แล้ว $(b,a) \in r$

(iii) ถ้า $(a,b) \in r$ และ $(b,c) \in r$ แล้ว $(a,c) \in r$

จงหาจำนวนของความสัมพันธ์สมมูลทั้งหมดบนเซต $A = \{1, 2, 3\}$

<u>ตอบ</u> 5

ต้องหาว่ามีวิธีสร้าง r ได้กี่แบบ จาก $A \times A = \{$ (1,1), (1,2), (1,3),
(2,1), (2,2), (2,3),
(3,1), (3,2), (3,3) $\}$

จาก (i) จะได้ว่า (1, 1), (2,2), (3,3) ต้องอยู่ใน r เลือกไม่ได้

จาก (ii) จะแบ่งคู่อันดับที่เหลือเป็น 3 คู่ คือ (1,2)&(2,1) และ (1,3)&(3,1) และ (2,3)&(3,2)

แต่ละคู่ ต้องอยู่ใน r ทั้งคู่ หรือไม่ก็ไม่อยู่ใน r ทั้งคู่ $\rightarrow$ จะแบ่งกรณีตามการมีอยู่ของ 3 คู่นี้

<u>กรณี</u>ไม่มีเลยซักคู่ : จะได้ $r = \{$ (1, 1), (2,2), (3,3) $\}$ สอดคล้องกับ (i), (ii), (iii) $\rightarrow$ มี 1 แบบ

<u>กรณี</u>มี 1 คู่ : จะได้ $r = \{$ (1, 1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) $\}$ ซึ่งสอดคล้องกับ (i), (ii), (iii) $\rightarrow$ มี 3 แบบ
$r = \{$ (1, 1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1) $\}$
$r = \{$ (1, 1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2) $\}$

<u>กรณี</u>มี 2 คู่ : จะเห็นว่า (iii) ไม่จริง เช่น ถ้ามี (1,2)&(2,1) กับ (1,3)&(3,1) แต่ไม่มี (2,3)&(3,2)
การมี (2,1) กับ (1,3) จะบีบให้ต้องมี (2,3) $\rightarrow$ กรณีนี้จะเป็นไปไม่ได้

<u>กรณี</u>มี 3 คู่ : คือทุกตัวสัมพันธ์กันหมด → (i), (ii), (iii) จะจริง → มี 1 แบบ
รวมทุกกรณี จะมี $1 + 3 + 1 = 5$ แบบ

6. สุ่มหยิบจำนวนมาหนึ่งจำนวนจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 999, 1000\}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนที่สุ่มมานี้มีผลบวกของเลขโดดทั้งหมดเท่ากับ 8

<u>ตอบ</u> 0.045
จะนับเฉพาะเลขที่ไม่เกิน 3 หลัก (1 – 999) เพราะ 1000 มีผลบวกเลขโดดไม่เท่ากับ 8
จำนวนแบบที่สนใจ จะเท่ากับการแจกของเหมือนกัน 8 ชิ้นให้คน 3 คน (แต่ละคนแทนแต่ละหลัก) โดยที่แต่ละคนอาจไม่ได้ของ (มีบางหลักเป็น 0 ได้)
ใช้ Stars & Bars จะได้จำนวนแบบ $= \binom{8+3-1}{3-1} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ แบบ
จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{45}{1000} = 0.045$

7. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่ง $|\vec{b}| = \sqrt{673}$ และ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2019$ จงหาจำนวนจริง λ ทั้งหมดซึ่งทำให้มีเวกเตอร์ $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ $\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$

<u>ตอบ</u> 3

$$\begin{aligned}
\vec{a} - \lambda\vec{b} &= \vec{c} \times \vec{b} && \text{ดอท } \vec{b} \text{ ทั้งสองฝั่ง} \\
(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \cdot \vec{b} &= (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} && \vec{c} \times \vec{b} \text{ ตั้งฉากกับ } \vec{b} \text{ เสมอ} \rightarrow \text{จะดอทกันได้ } 0 \\
\vec{a} \cdot \vec{b} - \lambda\, \vec{b} \cdot \vec{b} &= 0 \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \lambda |\vec{b}|^2 \\
2019 &= \lambda \sqrt{673}^2 \\
3 &= \lambda
\end{aligned}$$

8. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2019 โดยที่ $P(1) = P(2) = \dots = P(2019) = 1$ และ $P(2020) = 2$ จงหาจำนวนเต็มบวก r ที่ทำให้ $P(2019 + r) = 2019 + r$

<u>ตอบ</u> 2
จาก $P(1) = P(2) = \dots = P(2019) = 1$ จะได้สมการ $P(x) = 1$ มีรากคือ 1, 2, … , 2019

$$P(x) - 1 = 0$$

ดังนั้น $P(x) - 1 = a(x-1)(x-2)\dots(x-2019) \quad \dots(*)$

แทน $x = 2020$:

$$\begin{aligned}
P(2020) - 1 &= a(2020-1)(2020-2)\dots(2020-2019) \\
2 - 1 &= a(2019)(2018)\dots(1) \\
\frac{1}{2019!} &= a
\end{aligned}$$

แทน $x = 2019 + r$ และ $a = \frac{1}{2019!}$ ใน $(*)$:

$$\begin{aligned}
P(2019+r) - 1 &= \frac{1}{2019!}(2019+r-1)(2019+r-2)\dots(2019+r-2019) \\
2019 + r - 1 &= \frac{1}{2019!}(2018+r)(2017+r)\dots(r) \\
(2018+r)\,2019! &= (2018+r)(2017+r)(2016+r)\dots(r) \\
2019! &= (2017+r)(2016+r)\dots(r)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า ถ้า $r = 2$ จะได้ฝั่งขวา เท่ากับ 2019! พอดี
ถ้า $r < 2$ ฝั่งขวาจะน้อยลง และ ถ้า $r > 2$ ฝั่งขวาจะมากขึ้น → จะไม่มีคำตอบอื่นนอกจาก $r = 2$

9. จำนวนเชิงซ้อน z และ w สอดคล้องอสมการ $|z-1+3i| \le 1$ และ $|w-4-i| \le 1$
จงหาค่าต่ำสุดของ $|z-w|$

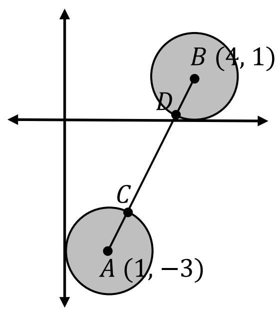
<u>ตอบ</u> 3

ให้ $z = x_1 + y_1 i$ และ $w = x_2 + y_2 i$ $\rightarrow$ จะวาดกราฟของทั้งสองอสมการ เพื่อหาบริเวณที่เป็นไปได้ของ z และ w

$$\begin{aligned} |z-1+3i| &\le 1 \\ |x_1 + y_1 i - 1 + 3i| &\le 1 \\ (x_1-1)^2 + (y_1+3)^2 &\le 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |w-4-i| &\le 1 \\ |x_2 + y_2 i - 4 - i| &\le 1 \\ (x_2-4)^2 + (y_2-1)^2 &\le 1 \end{aligned}$$

ฝั่งขวาเป็น ≤ 1 $\rightarrow$ จะได้ (x_1, y_1) คือจุดในวงกลม (รวมเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลาง $(1, -3)$ และรัศมี $= 1$
(x_2, y_2) คือจุดในวงกลม (รวมเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลาง $(4, 1)$ และ รัศมี $= 1$

จะวาดได้ดังรูป



$$\begin{aligned} |z-w| &= |(x_1+y_1 i) - (x_2 + y_2 i)| \\ &= |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| \\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \\ &= \text{ระยะทางจาก } (x_1, y_1) \text{ ไปยัง } (x_2, y_2) \\ &= \text{ระยะทางระหว่างจุดในวงกลมทั้งสองวง} \end{aligned}$$

จากรูป จะเห็นว่า ระยะทางระหว่างจุดในวงกลมทั้งสองที่สั้นที่สุด คือ
$$\begin{aligned} CD &= AB - AC - DB \\ &= \sqrt{(4-1)^2 + \left(1-(-3)\right)^2} - 1 - 1 \\ &= 5 - 1 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

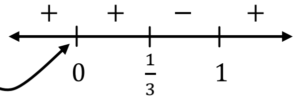
10. จงหาจำนวนจริง x_0 ทั้งหมดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$
มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

<u>ตอบ</u> $\frac{1}{3}, 1$

ค่าสูงสุด-ต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเกิดตรงจุดที่ f' เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบ หรือ ลบเป็นบวก

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/3}(1-x)^{2/3} \\ f'(x) &= x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(-1)\right) + (1-x)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) \\ &= -\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} + \frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{-2x+(1-x)}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1-3x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}} = \frac{3x-1}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

ตรงจุด $x = 0$ มาจาก $x^{\frac{2}{3}}$
$x^{\text{คู่}}$ ไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย



จากเส้นจำนวน จะเห็นว่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายที่ $x = \frac{1}{3}, 1$

เนื่องจาก $f(x)$ ต่อเนื่อง (เพราะ f มีแต่ $\sqrt[3]{}$ และไม่มีตัวส่วน) ดังนั้น ค่าสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเกิดที่ $x = \frac{1}{3}, 1$

หมายเหตุ : $f'(x)$ จะหาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 1$ แต่ก็ยังเกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ เพราะ $f'(x)$ เปลี่ยนจากลบ (ขาลง) เป็น บวก (ขาขึ้น) และ f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

11. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ และให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง t ทั้งหมดที่ทำให้

$$t^3 A \operatorname{adj}\left(A - \tfrac{1}{t} I\right) = \operatorname{adj}(tA - I)$$

ในที่นี้ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 จงหาผลรวมของสมาชิกทั้งหมดใน S

<u>ตอบ</u> $\frac{17}{12}$

ให้ $B = tA - I$

$\frac{1}{t} B = A - \frac{1}{t} I$

แทนในสมการ

$$\begin{aligned}
t^3 A \operatorname{adj}\left(A - \tfrac{1}{t} I\right) &= \operatorname{adj}(tA - I) \\
t^3 A \operatorname{adj}\left(\tfrac{1}{t} B\right) &= \operatorname{adj} B \\
t^3 A \det\left(\tfrac{1}{t} B\right) \left(\tfrac{1}{t} B\right)^{-1} &= \operatorname{adj} B \\
t^3 A \ \tfrac{1}{t^3} \det B \quad t B^{-1} &= \operatorname{adj} B \\
t A \quad \det B \quad B^{-1} &= \operatorname{adj} B \\
t A \quad \operatorname{adj} B &= \operatorname{adj} B \\
tA \operatorname{adj} B - \operatorname{adj} B &= \underline{0} \\
(tA - I) \operatorname{adj} B &= \underline{0} \\
B \quad \operatorname{adj} B &= \underline{0} \\
\det B \quad I &= \underline{0} \\
\det(tA - I) &= 0 \\
\det \begin{bmatrix} t-1 & 2t & 3t \\ 0 & 4t-1 & 5t \\ 0 & 0 & 6t-1 \end{bmatrix} &= 0 \\
(t-1)(4t-1)(6t-1) &= 0
\end{aligned}$$

$\operatorname{adj} A = \det A \cdot A^{-1}$

$\det(kA) = k^n \det A$

$t = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ $\rightarrow$ จะได้ผลรวม $= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{12+3+2}{12} = \frac{17}{12}$

12. สำหรับจำนวนจริง a กำหนดให้ $\lfloor a \rfloor$ เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ a

จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\lfloor x^2 - 3x + 2 \rfloor = 3x - 7$

<u>ตอบ</u> $\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}$

สมการจะเป็นจริง เมื่อ $3x - 7$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x^2 - 3x + 2$ มากกว่า $3x - 7$ อยู่ไม่ถึง 1

แสดงว่า $3x$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม

ให้ $3x = n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$\rightarrow \quad x = \frac{n}{3}$

$$\begin{aligned}
0 \le (x^2 - 3x + 2) - (3x - 7) &< 1 \\
0 \le x^2 - 6x + 9 &< 1 \\
0 \le (x-3)^2 &< 1
\end{aligned}$$

จริงเสมอ (เพราะผลกำลังสอง เป็นลบไม่ได้)

$$\begin{aligned}
-1 &< x - 3 < 1 \\
2 &< x < 4 \\
2 &< \tfrac{n}{3} < 4 \\
6 &< n < 12
\end{aligned}$$

แทนค่า n จะได้ $x = \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}$

13. มีฉลากอยู่ $n+1$ ใบอยู่ในกล่องใบหนึ่ง ฉลากแต่ละใบมีหมายเลข $0, 1, 2, \dots, n$ กำกับอยู่ สุ่มหยิบฉลากมาครั้งละ 1 ใบ 4 ครั้ง แบบ**หยิบแล้วใส่คืน** ถ้าความน่าจะเป็นที่ผลบวกของเลขบนฉลากที่หยิบได้ในสองครั้งแรก และสองครั้งหลังมีค่าเท่ากัน มีค่าเท่ากับ $\frac{an^2+bn+c}{(n+1)^3}$ จงหาค่าของ a, b และ c

ตอบ $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1$

ผลบวกของสลาก 2 ใบ จะมีค่าได้ตั้งแต่ $0+0=0$ ไปจนถึง $n+n=2n$

จะแบ่งกรณีนับตามค่าผลบวกแต่ละค่าที่เป็นไปได้ ตั้งแต่ 0 ไปถึง $2n$

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = 0 : ผลบวกได้ 0 จะมี $(0,0)$ แบบเดียว

→ สองครั้งแรกเลือกได้ 1 แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ 1 แบบ → ได้จำนวนแบบ $= 1 \times 1 = 1^2$ แบบ

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = 1 : ผลบวกได้ 1 จะมี $(0,1), (1,0)$ รวม 2 แบบ

→ สองครั้งแรกเลือกได้ 2 แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ 2 แบบ → ได้จำนวนแบบ $= 2 \times 2 = 2^2$ แบบ

⋮

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = n : ผลบวกได้ n จะมี $(0,n), (1,n-1), \dots, (n,0)$ รวม $n+1$ แบบ

→ สองครั้งแรกเลือกได้ $n+1$ แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ $n+1$ แบบ → ได้จำนวนแบบ $= (n+1)^2$ แบบ

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = $n+1$: กรณีนี้จะเริ่มเปลี่ยนไป เพราะตัวเลขบนสลากมีถึงแค่ n
ผลบวกได้ $n+1$ จะเหลือแค่ $(1,n), (2,n-1), \dots, (n,1)$ รวม n แบบ

→ สองครั้งแรกเลือกได้ n แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ n แบบ → ได้จำนวนแบบ $= n^2$ แบบ

⋮

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = $2n$: ผลบวกได้ $2n$ จะมี (n,n) แค่แบบเดียว

→ สองครั้งแรกเลือกได้ 1 แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ 1 แบบ → ได้จำนวนแบบ $= 1 \times 1 = 1^2$ แบบ

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ
$$\begin{aligned} &= 1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2+n^2+\dots+2^2+1^2 \\ &= 2(1^2+2^2+\dots+n^2)+(n+1)^2 \\ &= 2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+(n+1)^2 \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{3}+n+1\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+3n+3}{3}\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+4n+3}{3}\right) \end{aligned}$$
ดึงตัวร่วม $n+1$

และมีสลาก $n+1$ ใบ → หยิบ 4 ครั้ง จะหยิบได้ $(n+1)^4$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{(n+1)\left(\frac{2n^2+4n+3}{3}\right)}{(n+1)^4} = \frac{\left(\frac{2n^2+4n+3}{3}\right)}{(n+1)^3}$ → เทียบกับรูป $\frac{an^2+bn+c}{(n+1)^3}$ จะได้ $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=1$

14. กำหนดให้ $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ โดยที่ $f(x) = g(x)\,h(x)$ และ $h(x) > 0$ ทุก $x \in \mathbb{R}$
ถ้าสมมติว่า $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^{2562}$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$
$f(7) = 8$ และ $g'(7) = 4$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{h'(7)}{(h(7))^2}$

ตอบ -0.5

$\frac{h'(7)}{(h(7))^2}$ จะมีส่วนคล้ายกับดิฟผลหาร $\frac{\text{ล่าง บน}'-\text{บน ล่าง}'}{\text{ล่าง}^2}$ → จะพยายามจัดรูปให้ $h(x)$ เป็นตัวหาร

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\,h(x) \\ \frac{f(x)}{h(x)} &= g(x) \\ \frac{h(x)f'(x)-f(x)h'(x)}{(h(x))^2} &= g'(x) \end{aligned}$$

$$\frac{h(7)f'(7)-f(7)h'(7)}{\left(h(7)\right)^2} = g'(7)$$

$$\frac{h(7)f'(7)-\ 8\ \ h'(7)}{\left(h(7)\right)^2} = 4 \quad ...(*)$$

จะหา $f'(7)$ มาแทนใน $(*)$ โดยพยายามใช้ $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^{2562}$ ที่โจทย์กำหนดให้

จากนิยามของอนุพันธ์ จะได้ $f'(7) = \lim_{h\to 0}\frac{f(7+h)-f(7)}{h}$

$$\begin{aligned}
|f'(7)| &= \lim_{h\to 0}\frac{|f(7+h)-f(7)|}{|h|} \\
&\le \lim_{h\to 0}\frac{|7+h-7|^{2562}}{|h|} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|h|^{2562}}{|h|} \\
&= \lim_{h\to 0}|h|^{2561} = 0 \rightarrow \text{จะสรุปได้ว่า } f'(7)=0
\end{aligned}$$

แทน $f'(7)=0$ ใน $(*)$ จะได้ $\frac{h(7)(\,0\,)-\ 8\ \ h'(7)}{\left(h(7)\right)^2} = 4$

$$\frac{-\ 8\ \ h'(7)}{\left(h(7)\right)^2} = 4$$

$$\frac{h'(7)}{\left(h(7)\right)^2} = \frac{4}{-8} = -0.5$$

15. กำหนดให้ a,b,c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a<b<c$ และ $\det\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix}\right) = 16$

จงหาค่าของ $ac-b^2$

<u>ตอบ</u> -4

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix}\right) &= 16 \\
bc^2+ca^2+ab^2-a^2b-b^2c-c^2a &= 16 \\
bc^2-c^2a+ca^2-b^2c+ab^2-a^2b &= 16 \\
(b-a)c^2+(a^2-b^2)c+ab^2-a^2b &= 16 \\
(b-a)c^2+(a-b)(a+b)c+ab(b-a) &= 16 \\
(b-a)c^2-(b-a)(a+b)c+ab(b-a) &= 16 \\
(b-a)\ \left(c^2-(a+b)c+ab\right) &= 16 \\
(b-a)\quad (c-a)(c-b) &= 16
\end{aligned}$$

เรียงพจน์ตามเลขชี้กำลังของ c

เนื่องจาก $a<b<c$ ดังนั้น ทุกวงเล็บทางซ้ายจะเป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

และจะเห็นว่าฝั่งซ้าย วงเล็บแรก บวก วงเล็บที่สาม จะได้วงเล็บที่สองพอดี ($b-a\ +\ c-b\ =\ c-a$)

แยกตัวประกอบ 16 ตามเงื่อนไขดังกล่าว จะได้แบบเดียว คือ $2\times 4\times 2$

จะได้ $b-a = 2$ และ $c-a = 4$

$b = a+2$ $\qquad c = a+4$

ดังนั้น $ac-b^2 = a(a+4)-(a+2)^2$

$= a^2+4a-(a^2+4a+4) = -4$

16. จงหาคู่อันดับ (m, n) มาหนึ่งคู่อันดับโดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ต่างกันซึ่งทำให้ $\frac{2}{109} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

ตอบ $(55, 5995)$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{109} &= \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \\
\frac{2}{109} &= \frac{n+m}{mn} \\
2mn &= 109n + 109m \\
2mn - 109n - 109m &= 0 \\
n(2m-109) - 109m &= 0 \\
n(2m-109) - 109m + \frac{109^2}{2} &= \frac{109^2}{2} \quad \text{บวก } \frac{109^2}{2} \text{ เพื่อให้เกิด } 2m-109 \\
n(2m-109) - \frac{109}{2}(2m-109) &= \frac{109^2}{2} \\
(2m-109)\left(n - \frac{109}{2}\right) &= \frac{109^2}{2} \\
(2m-109)(2n-109) &= 109^2
\end{aligned}$$

เนื่องจาก m กับ n ต่างกัน ดังนั้น $2m - 109 \neq 2n - 109$

109 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น 109^2 จะแยกเป็นผลคูณของสองจำนวนที่ต่างกันได้แบบเดียว คือ 1×109^2

$$\begin{aligned}
2m - 109 &= 1 \\
m &= 55
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
2n - 109 &= 109^2 \\
2n &= 109(110) = 11990 \\
n &= 5995
\end{aligned}$$

(หรือถ้าสลับตัวประกอบกัน ก็จะได้ $m = 5995$, $n = 55$)

17. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$

ตอบ 16

$$\begin{aligned}
\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x &= 2 \\
\log_{2^2} \log_2 x + \log_2 \log_{2^2} x &= 2 \\
\frac{1}{2}\log_2 \log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) &= 2 \\
\log_2 (\log_2 x)^{\frac{1}{2}} + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) &= 2 \\
\log_2\left((\log_2 x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\log_2 x\right) &= 2 \\
(\log_2 x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\log_2 x &= 2^2 = 4 \\
(\log_2 x)^{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 x &= 8 \\
(\log_2 x)^{\frac{1}{2}+1} &= 8 \\
\log_2 x &= 8^{\frac{2}{3}} = 4 \\
x &= 2^4 = 16
\end{aligned}$$

18. จงหาค่าสูงสุดของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม 1 หรือ -1 เท่านั้น

ตอบ 4

det ของเมทริกซ์ 3×3 คือ $\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

เนื่องจากสมาชิกทุกตัวเป็น 1 หรือ -1 ดังนั้น aei , bfg , cdh , gec , hfa , idb จะเป็นได้แค่ 1 หรือ -1

ดังนั้น ค่า det จะมากที่สุดเมื่อ aei , bfg , cdh มีค่าเป็น 1 และ gec , hfa , idb มีค่าเป็น -1

ถ้าลองพยายามแทนค่า $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ ให้ได้ตามเงื่อนไขนี้ดู จะพบว่าแทนยังไงก็ไม่ได้

นั่นเป็นเพราะ $\begin{array}{l} aei = 1 \\ bfg = 1 \\ cdh = 1 \end{array}$ คูณ 3 สมการนี้จะได้ $(aei)(bfg)(cdh) = (1)(1)(1)$

$abcdefghi = 1$

แต่ $\begin{array}{l} gec = -1 \\ hfa = -1 \\ idb = -1 \end{array}$ คูณ 3 สมการนี้จะได้ $(gec)(hfa)(idb) = (-1)(-1)(-1)$

$abcdefghi = -1$

ขัดแย้งกันเอง

ดังนั้น จึงเป็นไปไม่ได้ที่จะได้ det จะมีค่าเท่ากับ 6

แต่ถ้ายอมให้เครื่องหมายผิดได้ 1 พจน์ แล้วลองแทนค่า $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ ดู จะพบว่าแทนได้

เช่นให้ทุกตัวเป็น 1 หมด ยกเว้น a กับ e ให้เป็น -1

จะได้ aei , bfg , cdh เป็น 1 และ gec , hfa เป็น -1 แต่ idb ไม่ได้ -1

จะได้ det สูงสุดคือ $1 + 1 + 1 - (-1) - (-1) - 1 = 4$

19. เกมเดินหมุดทอดลูกเต๋า มีกติกาคือ ให้เดินหมุดไปทีละช่อง ตามจำนวนที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 6 หน้าหนึ่งครั้ง โดยเมื่อเริ่มต้นเกม ให้หมุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 0 และเกมจบลงเมื่อหมุดมาหยุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 7 หากตำแหน่งรวมเกิน 7 ให้เดินหมุดย้อนกลับหลัง เช่น ถ้าหมุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 4 และทอดลูกเต๋าได้ตัวเลข 5 เมื่อเดินเสร็จสิ้น หมุดจะมาอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 5

0	1	2	3	4	5	6	7

จงหาความน่าจะเป็นที่เกมจะจบลงภายใน 5 ตา

ตอบ $\frac{671}{1296}$

จะใช้วิธีหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ตรงข้าม คือ หาความน่าจะเป็นที่เกมจะไม่จบใน 5 ตา แล้วเอา 1 ตั้งลบ

P(ไม่จบใน 5 ตา) = P(ไม่จบในตาที่ 1 และ ไม่จบในตาที่ 2 และ … และ ไม่จบในตาที่ 5)

= P(ไม่จบในตาที่ 1) × P(ไม่จบในตาที่ 2 เมื่อตาที่ 1 ไม่จบ) × P(ไม่จบในตาที่ 3 เมื่อตาที่ 2 ไม่จบ) × … × P(ไม่จบในตาที่ 5 เมื่อตาที่ 4 ไม่จบ)

ตาแรก ยังไงก็ไม่จบ เพราะห่างจุดหมาย 7 ช่อง แต่แต้มลูกเต๋าสูงสุดคือ 6 → P(ไม่จบในตาที่ 1) $= 1$

เมื่อตาแรกไม่จบ หมุดจะเดินไปหยุดที่ช่อง 1 ถึง 6 ช่องใดช่องหนึ่ง ซึ่งไม่ว่าหยุดที่ช่องไหน จะมีแต้มลูกเต๋าเพียงแบบเดียวที่จะทำให้จบเกมได้ในครั้งถัดไป (เช่น ถ้าหยุดที่ช่อง 1 ต้องโยนได้แต้ม 6 ถ้าหยุดที่ช่อง 2 ต้องโยนได้แต้ม 5 …)

นั่นคือ จะมีแต้มลูกเต๋า 5 แบบ ที่จะทำให้ไม่จบในตาที่ 2 → P(ไม่จบในตาที่ 2 เมื่อตาที่ 1 ไม่จบ) $= \frac{5}{6}$

เมื่อตาที่สองไม่จบ หมุดจะเดินไปหยุดที่ช่อง 2 ถึง 6 ช่องใดช่องหนึ่ง (เดินกลับได้อย่างมาก 5 ช่อง) แต่ไม่ว่าอยู่ที่ช่องไหนก็จะมีแต้มลูกเต๋าเพียงแบบเดียวที่จะทำให้จบเกมได้ในครั้งถัดไป (เช่น ถ้าหยุดที่ช่อง 2 ต้องโยนได้แต้ม 5 ถ้าหยุดในช่องที่ 3 ต้องโยนได้แต้ม 6 …) → คิดแบบเดิม จะได้ P(ไม่จบในตาที่ 2 เมื่อตาที่ 1 ไม่จบ) $= \frac{5}{6}$

จะเห็นว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกมไม่จบในตาถัดไป เมื่อกำหนดให้ตาที่แล้วไม่จบ $= \frac{5}{6}$ เสมอ

ดังนั้น P(ไม่จบใน 5 ตา) $= 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$ → P(จบใน 5 ตา) $= 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$

20. จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{2562} (k-2562x)^2\binom{2562}{k}x^k(1-x)^{2562-k}$

<u>ตอบ</u> 640.5

ให้ $n = 2562$ และ เขียนย่อ $\sum\limits_{k=0}^{2562}$ ด้วย $\sum$ เฉยๆ จะได้

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum (k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \sum (k-nx)^2\binom{n}{k}x^k\ \frac{(1-x)^n}{(1-x)^k} \\ &= (1-x)^n\sum (k-nx)^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\ &= (1-x)^n\sum (k^2-2knx+n^2x^2)\binom{n}{k}a^k \\ &= (1-x)^n\left(\sum k^2\binom{n}{k}a^k - 2nx\sum k\binom{n}{k}a^k + n^2x^2\sum\binom{n}{k}a^k\right) \quad ...(*) \end{aligned}$$

ให้ $a = \frac{x}{1-x}$

จะหา $\sum\binom{n}{k}a^k$, $\sum k\binom{n}{k}a^k$ และ $\sum k^2\binom{n}{k}a^k$ ใน $(*)$ โดยเอาทฤษฎีบททวินามมาดิฟไปเรื่อยๆ ดังนี้

จากทวินาม $\sum\binom{n}{k}a^k = (a+1)^n$

ดิฟ จะได้ $\sum k\binom{n}{k}a^{k-1} = n(a+1)^{n-1}$ → คูณ a ทั้งสองข้าง จะได้ $\sum k\binom{n}{k}a^k = na(a+1)^{n-1}$

ดิฟ จะได้ $\sum k(k-1)\binom{n}{k}a^{k-2} = n(n-1)(a+1)^{n-2}$

$$\begin{aligned} \sum k(k-1)\binom{n}{k}a^k &= n(n-1)a^2(a+1)^{n-2} \\ \sum k^2\binom{n}{k}a^k - \sum k\binom{n}{k}a^k &= n(n-1)a^2(a+1)^{n-2} \\ \sum k^2\binom{n}{k}a^k &= n(n-1)a^2(a+1)^{n-2} + na(a+1)^{n-1} \end{aligned}$$

แทนทั้ง 3 สูตรใน $(*)$ จะได้

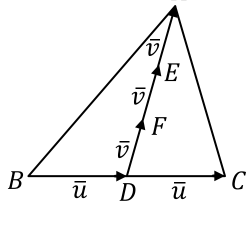
$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^n(n(n-1)a^2(a+1)^{n-2} + na(a+1)^{n-1} - 2n^2xa(a+1)^{n-1} + n^2x^2(a+1)^n) \\ &= (1-x)^n\Bigg(n(n-1)\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-2} + n\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} - \\ &\qquad 2n^2x\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} + n^2x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^n\Bigg) \\ &= n(n-1)x^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2 \\ &= -nx^2 + nx \end{aligned}$$

$a = \frac{x}{1-x}$ → $a+1 = \frac{1}{1-x}$

ใช้สูตร $\frac{4ac-b^2}{4a}$ จะได้ค่าสูงสุดคือ $\frac{4(-n)(0)-n^2}{4(-n)} = \frac{n}{4} = \frac{2562}{4} = 640.5$

21. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ จุด E และ F แบ่ง AD ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน ดังนี้ $|AE| = |EF| = |FD|$ ถ้า $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} = 4$ และ $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF} = -1$ แล้ว จงหาค่าของ $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

<u>ตอบ</u> 21



ให้ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} = \bar{u}$ และให้ $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EA} = \bar{v}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} &= 4 \\ (\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}) &= 4 \\ (\bar{u}+3\bar{v})\cdot(-\bar{u}+3\bar{v}) &= 4 \\ -|\bar{u}|^2 + 9|\bar{v}|^2 &= 4 \quad ...(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF} &= -1 \\ (\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF})\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}) &= -1 \\ (\bar{u}+\bar{v})\cdot(-\bar{u}+\bar{v}) &= -1 \\ -|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 &= -1 \quad ...(2) \end{aligned}$$

$(1)-(2):\ 8|\bar{v}|^2 = 5$

$|\bar{v}|^2 = \frac{5}{8}$

$(2):\ -|\bar{u}|^2 + \frac{5}{8} = -1$

$\frac{13}{8} = |\bar{u}|^2$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right|^2$

$$= |-3\bar{v}-\bar{u}|^2+|2\bar{u}|^2+|-\bar{u}+3\bar{v}|^2$$
$$= 9|\bar{v}|^2+6\bar{v}\cdot\bar{u}+|\bar{u}|^2+4|\bar{u}|^2+|\bar{u}|^2-6\bar{u}\cdot\bar{v}+9|\bar{v}|^2$$
$$= 18|\bar{v}|^2+6|\bar{u}|^2$$
$$= 18\cdot\frac{5}{8}+6\cdot\frac{13}{8} \quad = \frac{45+39}{4} \quad = 21$$

22. จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{15}+3^{15}+5^{15}+\cdots+(2n-1)^{15}}{n^{16}}$

<u>ตอบ</u> 2048

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{15}+3^{15}+5^{15}+\cdots+(2n-1)^{15}}{n^{16}}$$

เขียนย่อ $\sum\limits_{i=1}^{n}$ ด้วย $\sum$ เฉยๆ

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum(2i-1)^{15}}{n^{16}}$$

ทฤษฎีบททวินาม

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\left(\binom{15}{0}(2i)^{15}-\binom{15}{1}(2i)^{14}+\binom{15}{2}(2i)^{13}-\ldots-\binom{15}{15}\right)}{n^{16}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{15}{0}2^{15}\sum i^{15}}{n^{16}}-\frac{\binom{15}{1}2^{14}\sum i^{14}}{n^{16}}+\frac{\binom{15}{2}2^{13}\sum i^{13}}{n^{16}}-\cdots-\frac{\binom{15}{15}\sum 1}{n^{16}}\right)$$

พจน์ที่ 2 เป็นต้นไป ดีกรีเศษจะน้อยกว่าส่วน

เช่น $\frac{\sum i^{14}}{n^{16}} \le \frac{\sum n^{14}}{n^{16}} = \frac{n^{15}}{n^{16}}$ ทำให้ลิมิตเป็น 0

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{15}{0}2^{15}\sum i^{15}}{n^{16}}$$

$$= 2^{15}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum i^{15}}{n^{16}} \quad \ldots(*)$$

หมายเหตุ : ถ้าดูแนวโน้มจากสูตรผลบวกดีกรีต่ำๆ $\sum i=\frac{n(n+1)}{2}$ → พจน์ดีกรีสูงสุดคือ $\frac{n^2}{2}$

$\sum i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ → พจน์ดีกรีสูงสุดคือ $\frac{2n^3}{6}=\frac{n^3}{3}$

$\sum i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ → พจน์ดีกรีสูงสุดคือ $\left(\frac{n^2}{2}\right)^2=\frac{n^4}{4}$

จะพอเดาได้ว่า พจน์ดีกรีสูงสุดของ $\sum i^{15}$ คือ $\frac{n^{16}}{16}$ เอาไปแทนใน $(*)$ ก็จะได้คำตอบ

หรือจะหา $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum i^{15}}{n^{16}}$ อีกแบบได้ดังนี้ :

$$(i+1)^{16} = \binom{16}{0}i^{16}+\binom{16}{1}i^{15}+\binom{16}{2}i^{14}+\ldots+1$$
$$(i+1)^{16}-i^{16} = \binom{16}{1}i^{15}+\binom{16}{2}i^{14}+\ldots+1$$

เทเลสโคปิค : ตัวลบ จะหักกับตัวบวกของพจน์ถัดไปได้ เหลือตัวบวกพจน์แรก กับตัวลบของพจน์สุดท้าย

$$\sum((i+1)^{16}-i^{16}) = \sum\binom{16}{1}i^{15}+\sum\binom{16}{2}i^{14}+\ldots+\sum 1$$
$$(n+1)^{16}-1^{16} = \sum\binom{16}{1}i^{15}+\sum\binom{16}{2}i^{14}+\ldots+\sum 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{16}-1}{n^{16}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\binom{16}{1}i^{15}}{n^{16}}+\underbrace{\frac{\sum\binom{16}{2}i^{14}}{n^{16}}+\ldots+\frac{\sum 1}{n^{16}}}_{\text{ลิมิตเป็น } 0}\right)$$
$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\binom{16}{1}i^{15}}{n^{16}}$$
$$\frac{1}{16} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum i^{15}}{n^{16}}$$

แทนใน $(*)$ จะได้คำตอบคือ $2^{15}\cdot\frac{1}{16} = 2^{11} = 2048$

23. สำหรับเมทริกซ์ X, Y และ Z ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด $n \times n$ จะกล่าวว่า

X, Y, Z เป็น**อิสระเชิงเส้นต่อกัน** ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริง a, b, c ถ้า $aX + bY + cZ = 0$ แล้ว $a = b = c = 0$

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด $n \times n$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} AB - BA &= A + B \\ AC - CA &= \alpha A + C \\ BC - CB &= B + \beta C \end{aligned}$$

เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริง จงหาค่า α และ β

<u>ตอบ</u> $1, -1$

จาก
$$\begin{aligned} AB - BA &= A + B \quad ...(1) \\ AC - CA &= \alpha A + C \quad ...(2) \\ BC - CB &= B + \beta C \quad ...(3) \end{aligned}$$
→ จะเอา 3 สมการ มาหาทางหักล้างกัน เพื่อให้พจน์ที่เป็นเมทริกซ์คูณกัน (AB, BA, AC, CA, BC, BC) ตัดกันให้หมด

$(2) + (3)$:
$$\begin{aligned} AC - CA + BC - CB &= \alpha A + C + B + \beta C \\ AC + BC - CA - CB &= \alpha A + C + B + \beta C \\ (A + B)C - C(A + B) &= \alpha A + B + C + \beta C \\ (AB - BA)C - C(AB - BA) &= \alpha A + B + C + \beta C \\ ABC - BAC - CAB + CBA &= \alpha A + B + C + \beta C \quad ...(4) \end{aligned}$$
จาก (1)

$(1) + \beta(2)$:
$$\begin{aligned} AB - BA + \beta(AC - CA) &= A + B + \beta(\alpha A + C) \\ AB + \beta AC - BA - \beta CA &= A + B + \alpha\beta A + \beta C \\ A(B + \beta C) - (B + \beta C)A &= A + \alpha\beta A + B + \beta C \\ A(BC - CB) - (BC - CB)A &= A + \alpha\beta A + B + \beta C \\ ABC - ACB - BCA + CBA &= A + \alpha\beta A + B + \beta C \\ -ABC + ACB + BCA - CBA &= -A - \alpha\beta A - B - \beta C \quad ...(5) \end{aligned}$$
จาก (3)

$\alpha(1) - (3)$:
$$\begin{aligned} \alpha(AB - BA) - (BC - CB) &= \alpha(A + B) - (B + \beta C) \\ \alpha AB + CB - \alpha BA - BC &= \alpha A + \alpha B - B - \beta C \\ (\alpha A + C)B - B(\alpha A + C) &= \alpha A + \alpha B - B - \beta C \\ (AC - CA)B - B(AC - CA) &= \alpha A + \alpha B - B - \beta C \\ ACB - CAB - BAC + BCA &= \alpha A + \alpha B - B - \beta C \\ -ACB + CAB + BAC - BCA &= -\alpha A - \alpha B + B + \beta C \quad ...(6) \end{aligned}$$
จาก (2)

$(4) + (5) + (6)$ ฝั่งซ้ายจะตัดกันหมด :
$$\begin{aligned} 0 &= -A - \alpha\beta A - \alpha B + B + C + \beta C \\ 0 &= -(1 + \alpha\beta)A - (\alpha - 1)B + (1 + \beta)C \end{aligned}$$

แต่ A, B, C เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ดังนั้น $1 + \alpha\beta = 0$ และ $\alpha - 1 = 0$ และ $1 + \beta = 0$

ซึ่งจะได้ $\alpha = 1$ และ $\beta = -1$

24. จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ $\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9} - 1}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{27}}{2\cos\frac{2\pi}{27} - 1}\right) + \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{81}}{2\cos\frac{2\pi}{81} - 1}\right) + \dots$

<u>ตอบ</u> $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

จะแยกแต่ละพจน์เป็นผลลบ ที่ตัวตั้งมีมุมเป็นสามเท่าของตัวลบ เพื่อทำเทเลสโคปิค

ให้ $\theta = \frac{\pi}{9}$ จะได้
$$\begin{aligned} \frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9} - 1} = \frac{\sin 2\theta}{2\cos 2\theta - 1} &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - 3\sin^2\theta} \\ &= \frac{2\tan\theta}{1 - 3\tan^2\theta} \quad ...(*) \end{aligned}$$
$\div \cos^2\theta$ ทั้งเศษและส่วน

จะเห็นว่า (∗) มีบางส่วนคล้ายกับสูตร $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

$$\tan 3\theta = \frac{\tan\theta(3-\tan^2\theta)}{1-3\tan^2\theta}$$

×3 ให้ฝั่งขวามี $3\tan^2\theta$ เหมือนตัวส่วน

$$3\tan 3\theta = \frac{\tan\theta(9-3\tan^2\theta)}{1-3\tan^2\theta}$$

$$3\tan 3\theta = \frac{\tan\theta(8+1-3\tan^2\theta)}{1-3\tan^2\theta}$$

$$3\tan 3\theta = \tan\theta\left(\frac{8}{1-3\tan^2\theta}+1\right)$$

$$3\tan 3\theta = \frac{8\tan\theta}{1-3\tan^2\theta}+\tan\theta$$

$$\frac{3\tan 3\theta}{4}-\frac{\tan\theta}{4} = \frac{2\tan\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

รวมกับ (∗) จะสรุปได้ว่า $\frac{\sin 2\theta}{2\cos 2\theta-1} = \frac{3\tan 3\theta}{4}-\frac{\tan\theta}{4}$

ดังนั้น $\frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9}-1} = \frac{3\tan\frac{3\pi}{9}}{4}-\frac{\tan\frac{\pi}{9}}{4} = \frac{3\tan\frac{\pi}{3}}{4}-\frac{\tan\frac{\pi}{9}}{4}$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{27}}{2\cos\frac{2\pi}{27}-1} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3\tan\frac{3\pi}{27}}{4}-\frac{\tan\frac{\pi}{27}}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{9}}{4}-\frac{\tan\frac{\pi}{27}}{3\cdot4}$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{81}}{2\cos\frac{2\pi}{81}-1} = \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{3\tan\frac{3\pi}{81}}{4}-\frac{\tan\frac{\pi}{81}}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{27}}{3\cdot4}-\frac{\tan\frac{\pi}{81}}{9\cdot4}$$

$$\vdots$$

จะเห็นว่า ตัวลบของพจน์หน้า หักกับตัวตั้งของพจน์ถัดไปได้เสมอ

และพจน์หลังๆ มุมจะเข้าใกล้ศูนย์ ในขณะที่ตัวส่วนเข้าใกล้ ∞ → ตัวหลังๆ จะเข้าใกล้ 0

→ ผลบวกอนุกรมอนันต์ จะเข้าใกล้ตัวตั้งของพจน์แรก $= \frac{3\tan\frac{\pi}{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

25. กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน a, b และ c เป็นรากของพหุนาม $p(z) = z^3+21z-2562$
ให้ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมในระนาบเชิงซ้อนที่มีจุดยอดอยู่ที่ a, b และ c ตามลำดับ และ
ให้ ε เป็นวงรีที่แนบในสามเหลี่ยม ABC และสัมผัสกับจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC
ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 เป็นโฟกัสของวงรี ε แล้ว จงหาค่าของ $z_1^2+z_2^2$

<u>ตอบ</u> -14

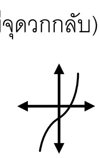
จะหาก่อน ว่า a, b, c มีจำนวนจริงกี่ตัว

ให้ x เป็นจำนวนจริง จะได้ $p(x) = x^3+21x-2562$ →
- เมื่อ $x=0$ จะได้ $p(0)=-2562$
- เมื่อ $x\to\infty$ จะได้ $p(x)\to\infty$
- เมื่อ $x\to-\infty$ จะได้ $p(x)\to-\infty$

$p'(x) = 3x^2+21$

อนุพันธ์เป็นบวกเสมอ → เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดทั้งเส้น (ไม่มีจุดวกกลับ)

นำข้อมูลที่ได้ทั้งหมด มาวาดกราฟแบบคร่าวๆ จะสรุปได้ว่า $y=p(x)$ ตัดแกน x ฝั่งบวก เพียงจุดเดียวแน่นอน → ดังนั้น a, b และ c จะเป็นจำนวนจริงบวก 1 ตัว



ส่วนอีก 2 รากที่เหลือ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นสังยุคกัน (เพราะ $p(z)$ มี สปส เป็นจำนวนจริง)

จากสูตรผลบวกผลคูณราก จะได้ ผลบวกรากทั้ง 3 ตัว $= -\frac{0}{1} = 0$ ...(∗)

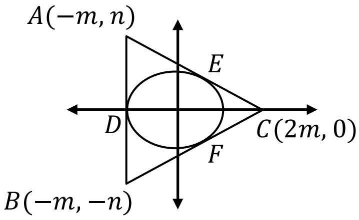
ผลบวกราก 2 ตัวคูณกัน $= +\frac{21}{1} = 21$ ...(∗∗)

ผลคูณรากทั้ง 3 ตัว $= -\frac{-2562}{1} = 2562$

จากข้อมูลที่มี รวมกับ $(*)$ รากทั้ง 3 ตัว จะอยู่ในรูป $2m$, $-m+ni$, $-m-ni$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนจริงบวก

และจาก $(**)$ จะได้
$$\begin{aligned} 2m(-m+ni)+2m(-m-ni)+(-m+ni)(-m-ni) &= 21 \\ -2m^2+2mni-2m^2-2mni \;+\; m^2+n^2 &= 21 \\ n^2-3m^2 &= 21 \quad ...(***) \end{aligned}$$

นำรากทั้ง 3 ตัวไปวาด Δ และวงรี จะได้ดังรูป



Δ และวงรี สมมาตรรอบแกน x ดังนั้น จุด ศก วงรี จะอยู่บนแกน x

ให้จุด ศก วงรี คือ $(h,0)$ $\rightarrow$ สมการวงรีต้องอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(ยังไม่รู้ว่า a มากกว่า b หรือไม่)

จะได้พิกัด x ของ จุด D คือ $h-a$ $\rightarrow$ จาก $\overline{AB}$ จะได้ $h-a = -m$
$$h+m = a \quad ...(1)$$

E คือจุดกึ่งกลาง $\overline{AC}$ จะได้พิกัด E คือ $\left(\frac{-m+2m}{2},\frac{n+0}{2}\right) = \left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$

E อยู่บนวงรี ดังนั้น $\frac{\left(\frac{m}{2}-h\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \quad ...(2)$

ดิฟสมการวงรี จะได้
$$\frac{2(x-h)}{a^2}+\frac{2y\cdot y'}{b^2} = 0$$
แทนค่าที่จุด E จะได้ $y' =$ ความชัน $\overline{AC} = \frac{0-n}{2m-(-m)} = -\frac{n}{3m}$
$$\frac{2\left(\frac{m}{2}-h\right)}{a^2}+\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{3m}\right)}{b^2} = 0$$
คูณ $\frac{3m}{4}$ ตลอด ให้หักกับ (2) ได้
$$\frac{\frac{3m}{2}\left(\frac{m}{2}-h\right)}{a^2}-\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{b^2} = 0 \quad ...(3)$$

$(2)+(3)$:
$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{m}{2}-h\right)^2}{a^2}+\frac{\frac{3m}{2}\left(\frac{m}{2}-h\right)}{a^2} &= 1 \\ \left(\frac{m}{2}-h\right)^2+\frac{3m}{2}\left(\frac{m}{2}-h\right) &= a^2 \end{aligned}$$
จาก (1)
$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{2}-h\right)^2+\frac{3m}{2}\left(\frac{m}{2}-h\right) &= (h+m)^2 \\ \frac{m^2}{4}-mh+h^2+\frac{3m^2}{4}-\frac{3mh}{2} &= h^2+2mh+m^2 \\ 0 &= \frac{9mh}{2} \end{aligned}$$

แต่ m เป็นจำนวนจริงบวก $\rightarrow$ จะสรุปได้ว่า $h=0$ นั่นคือ วงรีมีจุด ศก อยู่ที่ $(0,0)$

$\rightarrow$ แทน $h=0$ ใน (1) จะได้ $m=a$ $\rightarrow$ แทนต่อใน (3) จะได้
$$\begin{aligned} \frac{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}-0\right)}{a^2}-\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{b^2} &= 0 \\ \frac{3}{4} &= \frac{n^2}{4b^2} \\ b^2 &= \frac{n^2}{3} \end{aligned}$$

จะได้ $a^2-b^2 = m^2-\frac{n^2}{3} = \frac{3m^2-n^2}{3} = \frac{-(n^2-3m^2)}{3} = \frac{-21}{3} = -7$ (จาก $(***)$)

จะเห็นว่า a^2-b^2 เป็นค่าติดลบ ดังนั้น $a<b$ $\rightarrow$ เป็นวงรีแนวตั้ง $\rightarrow$ $c = \sqrt{b^2-a^2} = \sqrt{7}$

จะได้จุดโฟกัสคือ $(0,\pm\sqrt{7})$ ดังนั้น $z_1^2+z_2^2 = \left(0+\sqrt{7}i\right)^2+\left(0-\sqrt{7}i\right)^2 = -14$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สนธยา เสนามนตรี

และ คุณ Wasanont TeacherPomme Pongsawat

และ เพจ ทำโจทย์คณิตกันเถอะ สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ เพจคณิตบ้านอาบูลย์ สำหรับเฉลยวิธีทำ

ขอบคุณ คุณ TangMo Noi

และ คุณ Lim Wannaphahoon ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร