

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 61)

วันอาทิตย์ที่ 25 พฤศจิกายน 2561 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) มีเซต  $A, B, C$  ที่  $A \subset B \subset C$  และ  $A \in B \subset C$

(2) กำหนดให้  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  แทนเซตของสับเซตทั้งหมดของ  $\mathbb{R}$

ให้  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  เป็นสับเซตแท้ใดๆ ของ  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  ที่มีสมบัติว่า  $X - Y \in \mathcal{F}$  สำหรับทุก  $X, Y \in \mathcal{F}$

จะได้ว่า ถ้า  $A, B \in \mathcal{F}$  แล้ว  $A \cap B \in \mathcal{F}$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- |   |   |
|---|---|
| ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง             | ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ |
| ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง | ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ             |

2. ทุกวันอาทิตย์ เพชรรับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่า เว้นแต่เพชรมีสอบคณิตศาสตร์ในวันรุ่งขึ้น  
วันนี้เพชรไม่ได้รับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่า ข้อความต่อไปนี้สรุปได้จากข้อมูลข้างต้น

- ก. วันนี้ไม่ใช่วันอาทิตย์
- ข. เพชรมีสอบคณิตศาสตร์ในวันจันทร์
- ค. เพชรไม่รับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่าในวันอาทิตย์ หรือเพชรไม่มีสอบคณิตศาสตร์ในวันจันทร์
- ง. ข้อความ ก., ข. และ ค. ไม่มีข้อใดสรุปถูกต้อง

3. ให้  $\mathbb{I}$  แทนเซตของจำนวนเต็ม และสำหรับแต่ละจำนวนเต็ม  $n$  กำหนดให้  $n\mathbb{I} = \{nx : x \in \mathbb{I}\}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก  $n_1, n_2$  จะมีจำนวนเต็ม  $m$  เพียงหนึ่งเดียวที่ทำให้  $n_1\mathbb{I} \cap n_2\mathbb{I} = m\mathbb{I}$

(2) สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก  $n_1, n_2$  จะมีจำนวนเต็ม  $m$  ที่ทำให้  $n_1\mathbb{I} \cup n_2\mathbb{I} = m\mathbb{I}$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- |   |   |
|---|---|
| ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง             | ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ |
| ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง | ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ             |

4. กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) สำหรับจำนวนจริง  $x$  ใดๆ ถ้า  $a^x = x$  แล้ว  $a^{(a^x)} = x$

(2) สำหรับจำนวนจริง  $x$  ใดๆ ถ้า  $a^{(a^x)} = x$  แล้ว  $a^x = x$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- |   |   |
|---|---|
| ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง             | ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ |
| ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง | ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ             |

5. กำหนดให้  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันมีสมบัติว่า  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 1$  ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

ก.  $f(1) = 0$

ข.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$

ค.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

ง.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ไม่มีค่า

6. กำหนดให้  $X, Y, Z$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  และ  $h: Z \rightarrow X$  ถ้า  $h \circ g \circ f$  และ  $g \circ f \circ h$  เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ  $f \circ h \circ g$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ก.  $f$

ข.  $g$

ค.  $h$

ง. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

7. ลำดับฟีโบนัชชี ( $F_n$ ) นิยามโดย  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  และ  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  สำหรับจำนวนเต็ม  $n \geq 1$  เศษเหลือที่ได้จากการหาร  $F_{2018}$  ด้วย 4 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

8. ในห้องเรียนวิชาคณิตศาสตร์นักเรียนคนหนึ่งได้นิยาม การกระจายตัวของข้อมูล  $x_1, x_2, \dots, x_{2018}$  เป็น

$$\frac{\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2}{2018 \cdot 2017}$$

กำหนดให้  $\sigma^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{2018}$  และ  $s^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{2017}$  โดยที่  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}}{2018}$

ค่าของการกระจายตัวของข้อมูล  $x_1, x_2, \dots, x_{2018}$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- ก.  $\frac{2017}{2018} \sigma^2$       ข.  $\frac{2017}{2018} s^2$       ค.  $2\sigma^2$       ง.  $2s^2$

9. ลำดับอนันต์  $(a_n)$  นิยามโดย  $a_1 = 0$  และ  $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{a_n}$  สำหรับจำนวนเต็ม  $n \geq 1$   
ถ้าลำดับ  $(a_n)$  เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$   
ข.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$   
ค.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$   
ง. เป็นไปได้ทั้งสองกรณีว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$  หรือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$

10. ค่าของ  $\cos \frac{2\pi}{7}$  เป็นรากของพหุนามในข้อใดต่อไปนี้

ก.  $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

ข.  $8x^3 - 8x^2 - 2x + 1$

ค.  $8x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

ง.  $8x^3 + 8x^2 - 2x - 1$

11. กำหนดให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 2 มีค่าต่ำสุดเมื่อ  $x = 3$  และ  $F(2x)$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x)$  ถ้า  $F'(2) = -5$  และ  $F''(-2) = -4$  พื้นที่ปิดล้อมของ  $y = f(x)$  กับแกน  $X$  จาก  $x = 0$  ถึง  $x = 3$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 16.5

ข. 18

ค. 33

ง. 36





ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

16. ในการสำรวจความนิยมของประชากรในการติดตามข่าวพบว่า 400 คนจาก 1000 คนติดตามข่าวจากโซเชียลมีเดีย และ 12% ของคนติดตามข่าวจากโซเชียลมีเดียฟังข่าวจากทางวิทยุด้วย ในขณะที่ 20% ของคนที่ไม่ติดตามข่าวทางโซเชียลมีเดียฟังข่าววิทยุ ก็เปอร์เซ็นต์ของผู้ติดตามข่าวทางวิทยุติดตามข่าวทางโซเชียลมีเดียด้วย (ตอบในรูปทศนิยมสองตำแหน่ง)

17. กำหนดให้  $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1 \text{ และ } x^2 + y^2 \leq 1 \}$

นิยาม  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  โดย  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  สำหรับทุก  $(x, y) \in A$  จงหาเรนจ์ของ  $f$  (ตอบในรูปของช่วง)

18. กำหนดจุด  $A = (4, 3)$  บนระนาบ ถ้าจุด  $B = (a, b)$  บนวงกลม  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 85 = 0$  ทำให้ระยะทาง  $AB$  จากจุด  $A$  ไปยังจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมมีค่าน้อยที่สุด แล้ว จงหาค่าของ  $3a + 2b$



19. เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสของพาราโบลา  $y^2 = 16x$  สัมผัสกับวงกลม  $(x - 6)^2 + y^2 = 2$  ที่จุดใด

20. จั้หาจำนวนจริง  $a$  ทั้งหมดที่ทำให้สมการต่อไปนี้ีผลเฉลยเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว

$$\log_3(x - 2) + \log_3(a - x) = 2$$

21. ให้  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  เป็นเวกเตอร์ซึ่ง  $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 1, |\vec{w}| = 1$  และ  $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} = \vec{0}$

จงหาค่าของ  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

22. ถ้าเขียนผลคูณ  $(x^2 + 4)^3(x - 2)^5$  ในรูปของพหุนาม  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{11}x^{11}$  แล้วจงหาค่าของ  $a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$

23. ให้  $x_1, x_2, \dots, x_{50}$  เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2x_2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2x_3}, \quad \dots, \quad x_{49} = 1 + \frac{1}{2x_{50}}, \quad x_{50} = 1 + \frac{1}{2x_1}$$

จงหาค่าของ  $x_{25}$

24. จงเขียนเซตของจำนวนจริง  $k$  ทั้งหมดที่ทำให้  $\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} = k\} = \emptyset$  ในรูปของช่วง

25. นิยามจำนวนต่างใจตรงกันว่าเป็นจำนวนเต็มบวกที่สามารถเขียนในรูปผลต่างกำลังสองของจำนวนเต็มบวกได้สองแบบ เช่น  $64$  เป็นจำนวนต่างใจตรงกัน เนื่องจาก  $64 = 10^2 - 6^2 = 17^2 - 15^2$  แต่  $3$  ไม่เป็นจำนวนต่างใจตรงกัน เนื่องจาก  $3 = 2^2 - 1^2$  และไม่มีจำนวนเต็มบวก  $a$  และ  $b$  อื่นใดที่  $3 = a^2 - b^2$   
จงหาจำนวนต่างใจตรงกันที่มีค่าน้อยที่สุด

ตอนที่ 3 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

26. เด็กแต่งงานจะทำงานเป็นขนมเค้กที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมซ้อนขึ้นไปเป็นชั้นๆ โดยที่แต่ละชั้นที่ซ้อนขึ้นไปมีรัศมีหน้าตัดลดลงครึ่งหนึ่ง และมีส่วนสูงเป็น  $\frac{2}{3}$  เท่าของส่วนสูงชั้นก่อนหน้านั้น ถ้าปริมาตรของเนื้อเค้กที่ฐานชั้นล่างสุดเป็น 10 ลูกบาศก์หน่วย แล้ว ปริมาตรของเค้กแต่งงานชิ้นนี้เท่ากับกี่ลูกบาศก์หน่วย

27. กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 29$$

จงหาค่าของ  $a + b + c$

28. นำจุด 16 จุด มาจัดเรียงบนระนาบ โดยแบ่งออกเป็น 4 แถว แต่ละแถวมี 4 จุด และระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใดๆ ที่อยู่ติดกันในแถวเดียวกัน เท่ากับระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใดๆ ที่อยู่ติดกันในหลักเดียวกัน ความน่าจะเป็น ที่เมื่อสุ่มเลือกจุด 3 จุดใดๆ มาจากระนาบนี้แล้วอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันเท่ากับเท่าใด

29. กำหนดให้  $z$  และ  $w$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่  $|z| \leq 1$  และ  $|w| \leq 1$  ถ้า  $|z + iw| = |z - iw| = 2$  แล้ว  
จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ  $z^2 - zw + w^2$

30. กำหนดให้  $\alpha > 0$  จงหาจำนวนจริงบวก  $x$  และ  $y$  ทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการต่อไปนี้

$$x^{x+y} = y^\alpha$$

$$y^{x+y} = x^{2\alpha} y^\alpha$$

31. กำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และให้  $I$  แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด  $n \times n$  และ  $J$  แทนเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ที่มี 1 เป็นสมาชิกในทุกตำแหน่งถ้าอินเวอร์สของเมทริกซ์  $29I - 3J$  คือ  $\frac{1}{29}(I - 3J)$  แล้ว จงหาค่าของ  $n$
32. มีฉลาก 10 ใบ โดยที่ฉลากแต่ละใบเขียนเลขจำนวนจาก 1 ถึง 10 โดยที่ฉลากแต่ละใบมีเพียงเลขจำนวนเดียวเท่านั้น สุ่มหยิบฉลากมา 10 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ผลต่างของจำนวนที่ปรากฏบนฉลากแต่ละคู่ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2
33. กำหนดให้  $ABCDE$  เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม จุดศูนย์กลางที่  $O$  และมีรัศมียาว 3 หน่วย ถ้า  $X$  เป็นจุดใดๆ ที่ห่างจากจุด  $O$  เป็นระยะทาง 4 หน่วย แล้ว  $|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2 + |EX|^2$  มีค่าเท่าใด

34. รูปสามเหลี่ยม  $ABC$  รูปหนึ่งมีด้านแต่ละด้านยาวเป็นจำนวนเต็ม และ  $\angle A = 3\angle B$  ถ้าด้านที่ยาวที่สุดอยู่ตรงข้ามมุม  $A$  มีความยาว 10 หน่วยแล้ว ความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมดังกล่าวเท่ากับเท่าใด

35. จงหาค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 - 2 \cos(2^{k-n}\pi) + 2 \cos(2^{k-n+1}\pi))$

โดยนิยามสัญลักษณ์  $\prod_{k=0}^n a_k = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$  สำหรับลำดับ  $(a_k)_{k=0}^n$  ใดๆ

เฉลย

- |      |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|
| 1. ก | 10. | 19. | 28. |
| 2.   | 11. | 20. | 29. |
| 3.   | 12. | 21. | 30. |
| 4.   | 13. | 22. | 31. |
| 5.   | 14. | 23. | 32. |
| 6.   | 15. | 24. | 33. |
| 7.   | 16. | 25. | 34. |
| 8.   | 17. | 26. | 35. |
| 9.   | 18. | 27. |     |

แนวคิด

1. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) มีเซต  $A, B, C$  ที่  $A \subset B \subset C$  และ  $A \in B \subset C$

(2) กำหนดให้  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  แทนเซตของสับเซตทั้งหมดของ  $\mathbb{R}$

ให้  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  เป็นสับเซตแท้ใดๆ ของ  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  ที่มีสมบัติว่า  $X - Y \in \mathcal{F}$  สำหรับทุก  $X, Y \in \mathcal{F}$

จะได้ว่า ถ้า  $A, B \in \mathcal{F}$  แล้ว  $A \cap B \in \mathcal{F}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นกล่าวถูกต้อง

- |   |   |
|---|---|
| ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง             | ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ |
| ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง | ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ             |

ตอบ

(1)  $A \subset B$  และ  $A \in B$  ถ้า  $B = A \cup \{A\}$

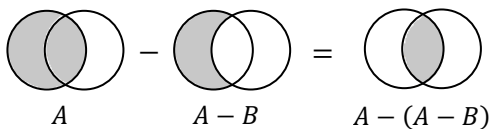
เช่นถ้าให้  $A = \emptyset$  จะได้  $B = A \cup \{A\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

และ  $C = B \cup \{B\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ดังนั้น จะมี  $A = \emptyset, B = \{\emptyset\}$  และ  $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข  $\rightarrow$  (1) ถูก

(2) จากสมบัติของ  $\mathcal{F}$  ถ้า  $A, B \in \mathcal{F}$  จะสรุปได้ว่า  $A - B \in \mathcal{F}$

และเนื่องจาก  $A, A - B \in \mathcal{F}$  จะสรุปต่อด้วยสมบัติเดิมได้ว่า  $A - (A - B) \in \mathcal{F}$



ซึ่ง  $A - (A - B)$  ก็คือ  $A \cap B$  นั่นเอง  
จึงสรุปได้ว่า  $A \cap B \in \mathcal{F} \rightarrow$  (2) ถูก

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สันธยา เสนามนตรี และ คุณ Atiratch Laoharenoo สำหรับข้อสอบครับ