

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 59)

วันอาทิตย์ที่ 26 พฤศจิกายน 2560 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. สำหรับเซตย่อย $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ใน \mathbb{R} ใดๆ นิยาม

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{มีจำนวนนับ } n \text{ ซึ่ง } x \in A_n\} \quad \text{และ} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ ทุกจำนวนนับ } n\}$$

ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

ก. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n}\right] = \mathbb{R}$

ข. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$

ค. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1]$

ง. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$

2. ตำรวจทำการสอบสวนผู้ต้องสงสัยในคดีลักทรัพย์จำนวน 5 คน ได้แก่ กนกอร เขมรัฐ แคทรียา จิรศักดิ์ เชิงชาย

ภายใต้ข้อสมมติฐานว่าขโมยจะพูดโกหกเสมอ ส่วนผู้บริสุทธิ์จะพูดความจริงเสมอ และขโมยมีเพียงคนเดียว จากการสอบปากคำดังนี้

- กนกอร: ขโมยเป็นผู้ชาย
- แคทรียา: ขโมยคือ กนกอร
- เชิงชาย: ถ้าขโมยคือจิรศักดิ์แล้วกนกอรเป็นผู้บริสุทธิ์

ผู้ต้องสงสัยในข้อใดเป็นขโมย

ก. กนกอร

ข. แคทรียา

ค. เชิงชาย

ง. ข้อมูลไม่พอที่จะสรุปได้

6. นักวิ่งสองคน A และ B กำลังจะวิ่งแข่งบนลู่วิ่งที่เป็นเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี r เมตร เป็นจำนวน 50 รอบ ถ้านักวิ่งเริ่มต้นวิ่งที่จุดเดียวกันและวิ่งไปในทิศทางเดียวกันด้วยความเร็วคงที่ โดย A วิ่งด้วยความเร็ว a เมตรต่อนาที และ B วิ่งด้วยความเร็ว b เมตรต่อนาที โดยที่ $a > b$ เมื่อการแข่งขันเสร็จสิ้น พบว่า A ได้วิ่งแซงรอบ B ไปเป็นจำนวนทั้งสิ้น 17 รอบ ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าที่เป็นไปได้ของ b/a

ก. 0.631

ข. 0.640

ค. 0.651

ง. 0.661

7. ค่าของ $(\cot 10^\circ - 3\sqrt{3})(\csc 20^\circ + 2 \cot 20^\circ)$ ตรงกับข้อใด

ก. $3\sqrt{3} - 1$

ข. 4

ค. $\sqrt{3} + 2$

ง. 6

8. กำหนดให้มีข้อมูลของตัวอย่าง ชุด A ประกอบด้วย 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

ชุด B ประกอบด้วย 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ข้อมูลชุด A มีสัมประสิทธิ์ของพิสัยมากกว่าข้อมูลชุด B (2) ข้อมูลชุด A มีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันมากกว่าข้อมูลชุด B

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) มีจำนวนเชิงซ้อน z ที่ไม่ใช่จำนวนจริง แต่ $z - \frac{1}{z}$ เป็นจำนวนจริง

(2) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนจริง และ $z + \frac{1}{z}$ เป็นจำนวนจริงแล้ว $|z| = 1$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

16. ถ้าฟังก์ชัน $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการ $g(x) + xg\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x$ จงเขียน $g(x)$ ในรูปของ x

17. กำหนดให้ \vec{a} และ \vec{b} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้าเวกเตอร์ $\vec{a} + 2\vec{b}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $5\vec{a} - 4\vec{b}$ แล้ว ความยาวรอบรูปมากที่สุดที่เป็นไปได้ของรูปสามเหลี่ยมที่มี \vec{a} และ \vec{b} เป็นด้านประกอบสองด้าน มีค่าเท่ากับเท่าใด

18. กำหนดให้ P เป็นจุดจุดหนึ่งที่ไม่เป็นจุดยอดบนไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 9$ ถ้า $PF_1 \cdot PF_2 = 25$ เมื่อ F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลาดังกล่าวแล้ว รูปสามเหลี่ยม PF_1F_2 มีพื้นที่เท่ากับเท่าใด

19. ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ ทุก $x \in [-2, 3]$ แล้วพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = |f(x)|$ ที่อยู่เหนือแกน X บนช่วงปิด $[-2, 3]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

20. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $x < y$ และสอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 = 2017$ จงหาค่าของ y

21. กำหนดให้ $x > 1$ และ $y > 1$ สอดคล้องกับสมการ $\log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}$ แล้ว ค่าต่ำสุดของ $x - 12y$ เท่ากับเท่าใด

22. กำหนดพาราโบลา $p(x) = 2017x^2 - 2560x - 743$

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นสัมผัสพาราโบลา $p(x)$ ที่จุด $(-10, p(-10))$ และที่จุด $(1000, p(1000))$ ตามลำดับ ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกันที่จุด (x_0, y_0) แล้ว x_0 มีค่าเท่าใด

23. กำหนดให้ $A = \{a \in \mathbb{R} : \text{สมการ } \ln(ax - 3) - \ln(1 - x) = \ln(x - 2) \text{ มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว}\}$ และ $B = \{b \in \mathbb{R} : |b - 1| < |6 - 4b|\}$

จงหา $A \cap B$

24. **บทนิยาม** สำหรับเมทริกซ์ A ใดๆ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ นิยาม $A \bmod n$ ให้เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากับมิติของ A และสมาชิกตำแหน่งใดๆของ $A \bmod n$ ได้จากเศษเหลือที่ได้จากการหารสมาชิกในตำแหน่งนั้นของ A ด้วย n เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ แล้ว จะได้ว่า $A \bmod 3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
 ให้ $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \{0,1,2\} \right\}$
 จำนวนเมทริกซ์ $A \in X$ ทั้งหมดที่มีสมบัติ $A^2 \bmod 3 = I$ เท่ากับเท่าใด

25. สุ่มเลือกจำนวนเต็ม a และ b จากเซตของจำนวนเต็ม $\{1, 2, \dots, 100\}$ ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ a และ b ซึ่งทำให้ $7^a + b$ หารด้วย 10 ลงตัวเท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 3 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

26. จงหาคำตอบ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ทั้งหมดของระบบสมการ $\begin{cases} 2 \log(x - 2y) = \log x + \log y \\ 3^{x-y} + 27^y = 6 \end{cases}$

27. จ้หาจำนวนจริง a ทั้งหมดที่ทำให้เซตคำตอบของสมการ $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ ไม่เป็นเซตว่าง

28. มีชายหญิงอยู่จำนวนหนึ่งถูกจัดให้นั่งทานอาหารรอบโต๊ะกลม โดยมีเงื่อนไขว่า

มีผู้หญิง 3 คนที่มีผู้ชายนั่งทางขวามือถัดจากตนเอง

มีผู้ชาย 1 คนที่มีผู้ชายนั่งทางซ้ายมือถัดจากตนเอง

มีผู้หญิง 3 คนที่มีผู้หญิงนั่งทางซ้ายมือถัดจากตนเอง

จะมีวิธีในการจัดให้ชายหญิงกลุ่มนี้้นั่งรอบโต๊ะกลมโดยสอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นทั้งหมดกี่วิธี

29. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

30. หนูทดลองตัวหนึ่งอยู่ในห้องของกล่องทดลองเขาวงกตซึ่งมีช่องประตู 4 ช่อง มีหนึ่งช่องของประตูที่มีทางเดินที่นำหนูไปสู่ทางออกภายนอกโดยหนูจะใช้เวลาในการเดินทาง 9 วินาที ส่วนช่องประตูอีกสามช่องที่เหลือจะนำไปสู่ทางเดินที่วกกลับมาที่ห้องเดิม โดยหนูจะใช้เวลาในทางเดินเหล่านี้เป็นเวลา 3, 5 และ 7 วินาทีตามลำดับ และทุกครั้งที่หนูกลับมาที่ห้องเดิมหนูจะสุ่มเข้าช่องประตูอีกครั้งโดยที่การสุ่มเลือกประตูแต่ละครั้งจะไม่ขึ้นกับการสุ่มเลือกช่องประตูในครั้งก่อนหน้า จงหาความน่าจะเป็นที่หนูจะใช้เวลา 30 วินาทีในการเดินทางออกไปสู่ภายนอก

31. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

32. จงหาผลรวมของค่า x ทั้งหมดในช่วง $[0, 2\pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\frac{4}{\sec x - 2 \tan x} - \frac{1}{\sec x + \tan x} = 3\sqrt{3}$

33. จงหาค่า $a > 0$ และ $x > 0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการ
$$\begin{cases} (\ln a)a^x = 1 \\ a^x = x \end{cases}$$

34. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 5×5 ซึ่ง A , B และ $B^{-1} - A$ เป็นเมทริกซ์ที่ไม่เอกฐาน
 จงหา $(A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1}$ (ตอบในรูปของเมทริกซ์ A และ B โดยไม่ใช่เครื่องหมายอินเวอร์ส)

35. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ
$$\frac{1}{x - \tan 20^\circ} + \frac{1}{x + \tan 40^\circ} + \frac{1}{x - \tan 80^\circ} = 0$$

เฉลย

1.	10.	19.	28.
2.	11.	20.	29.
3.	12.	21.	30.
4.	13.	22.	31.
5.	14.	23.	32.
6.	15.	24.	33.
7.	16.	25.	34.
8.	17.	26.	
9.	18.	27.	35.

แนวคิด

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สนธยา เสนามนตรี สำหรับข้อสอบครับ