ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 55)
วันอาทิตย์ที่ 25 พฤศจิกายน 2555 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 15 เป็นข้อสอบแบบเลือกคำตอบ ข้อละ 2 คะแนน

1. ถ้าจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$ เป็นจุดเดียวกันกับจุดโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ แล้ว a^2 มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 9 ข. 16 ค. $\frac{344}{25}$ ง. 1432

2. กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ โดยที่ $P(A^c)=\frac{5}{6}$ และ $P(A^c\cap B^c)=\frac{1}{2}$ แล้ว $P(B-A)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{6}$ ข. $\frac{1}{4}$ ค. $\frac{1}{3}$ ง. $\frac{2}{5}$

3. ถ้า $a_1,a_2,a_3,\ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง โดยที่ $a_1\neq 0$ และ $a_{32}=4a_{20}$ แล้ว $a_{10}+a_{25}+2a_{40}$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. a_{67} ข. a_{68} ค. a_{69} ง. a_{70}

4. กำหนดให้ $\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ โดยที่ $b \neq 0$ และ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
ถ้ามุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ เท่ากับ $60°$ แล้ว a มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ข. $-\frac{1}{2}$ ค. $\frac{1}{2}$ ง. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. ถ้า $f(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\sqrt{x^3 + 1 + 2x\sqrt{x}}$ แล้ว $f(1) - f(0)$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 0.4 ค. 1.2 ง. 1.4

6. ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $3^{2x+1} + 2^{x+1} = 6^x + 2(3^{x+1})$ โดยที่ $a \neq b$
แล้ว $\left(\frac{3}{2}\right)^{ab}$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{6}$ ข. $\frac{1}{3}$ ค. $\frac{1}{2}$ ง. 2

7. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2 ซึ่ง $A^2 = 2(A + \mathrm{I}_2)$ โดยที่ I_2 แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 2×2 แล้ว $|\det(A - \mathrm{I}_2)|$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\sqrt{2}$ ข. 2 ค. $\sqrt{3}$ ง. 3

8. กำหนดให้ $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ และ $g(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) โดเมนของ f $=$ โดเมนของ g

(2) $f = g$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นจริง

ง. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นเท็จ

9. เด็กนักเรียนมัธยมปลายห้องหนึ่งมีจำนวนทั้งสิ้น $a + b$ คน ประกอบด้วยเด็กนักเรียนชาย a คน และเด็กนักเรียนหญิง b คน ถ้าสุ่มเลือกนักเรียนมา 2 คน จากนักเรียนทั้ง $a + b$ คนเหล่านี้ ปรากฏว่า ความน่าจะเป็นที่เด็กนักเรียนที่เลือกมา 2 คนนี้เป็นเพศเดียวกันมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ จงพิจารณาว่า $a^2 + b^2 - 2ab$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. $|a - b|$ ค. $\binom{a+b}{2}$ ง. $a + b$

10. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ และ สอดคล้องกับสมการ $\arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x) = 1$ แล้ว x เป็นสมาชิกของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

ก. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ ข. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ ค. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ ง. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

11. กำหนดให้ p และ q เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $q \neq 0$ ซึ่งทำให้สมการ $z^2 + pz + q = 0$ มีรากที่ต่างกันเป็นจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ถ้า $|z_1| = 1 = |z_2|$ แล้ว ส่วนจริงของ $z_1\overline{z_2}$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{p}{2q^2} - 1$ ข. $\frac{p^2}{2q^2} - 1$ ค. $\frac{p}{q^2} - 1$ ง. $\frac{p^2}{2q} - 1$

12. กำหนดให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะบวกใดๆ และ x และ y เป็นจำนวนอตรรกยะบวกใดๆ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) r^s เป็นจำนวนตรรกยะบวก

(2) r^x เป็นจำนวนอตรรกยะบวก

(3) y^s เป็นจำนวนอตรรกยะบวก

(4) x^y เป็นจำนวนอตรรกยะบวก

จำนวนข้อความที่เป็นจริงจากข้อความทั้ง 4 ข้อความข้างต้นตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1 ค. 2 ง. 3

13. สำหรับ X และ Y ที่เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ใดๆ นิยาม $[X,Y]=XY-YX$

ให้ A,B,C และ D เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ใดๆ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\det([A,B]) = -\det([B,A])$

(2) $[A+C\ ,\ B+D] = [A\ ,B]+[C\ ,D]$

(3) $[A,[B\ ,C]]+[B,[C\ ,A]] = -[C\ ,[A\ ,B]]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) , (2) และ (3) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) และ (3) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) และ (3) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ง. ข้อ (1) , (2) และ (3) เป็นเท็จ

14. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง

และให้ a เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=10$ แล้ว $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=5$

(2) ถ้า $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=5$ แล้ว $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=10$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นจริง

ง. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นเท็จ

15. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ โดยที่ $\cos^2 \mathrm{A}+\cos^2 \mathrm{B} \geq \sin^2 \mathrm{C}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ABC ไม่เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม

ข. ABC ไม่เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ค. ABC ไม่เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน

ง. ABC ไม่เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ตอนที่ 2 ข้อ 16 - 25 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ ข้อละ 3 คะแนน

16. ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด
ถ้า $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ โดยที่ $f\big(x + f(y)\big) = x + y - 4$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y แล้ว $f(10)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

17. กำหนดให้ $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\cot^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\csc^2 x} = -3\right\}$
และ $B = \{x \in A \mid 0 < x < 2\pi\}$ ผลบวกสมาชิกทั้งหมดของเซต B มีค่าเท่ากับเท่าใด

18. นักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายห้องหนึ่งมีจำนวนทั้งหมด 63 คน ประกอบไปด้วยนักเรียนชาย a คน และนักเรียนหญิง b คน ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ครั้งหนึ่งปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชาย เท่ากับ a คะแนน และคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนหญิง เท่ากับ b คะแนน ถ้าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งห้องเท่ากับ 35 คะแนน แล้ว ค่า b ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

19. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมในระนาบพิกัดฉาก XY โดยที่ ABC มีความยาวเส้นรอบรูปเท่ากับ 36 หน่วย ให้ L , M และ N เป็นจุดบนด้าน BC , AC และ AB ตามลำดับ โดยที่ ด้าน BL ยาว 3 หน่วย ด้าน CM ยาว 4 หน่วย และด้าน AN ยาว 5 หน่วย ถ้า $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN} = \bar{0}$ แล้ว $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

20. ถ้า x , y และ z เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $(4^{2x}+2)(4^{2y}+4)(4^{2z}+8) = 4^{x+y+z+3}$ แล้ว $4^{2x+3y+4z}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

21. ให้ P เป็นพาราโบลา $y=4x^2$ และ F เป็นจุดโฟกัสของ P จงหาสมการทางเดินของจุดกึ่งกลางของคอร์ดของ P ซึ่งคอร์ดเหล่านี้ผ่านจุดโฟกัส F

22. ตารางขนาด 1×8 ตารางหน่วย แบ่งเป็นช่องขนาด 1×1 ตารางหน่วย จำนวน 8 ช่อง ระบายสีแต่ละช่องด้วยสีเพียงหนึ่งสี จากสีแดง เหลือง ดำ โดยที่จำนวนช่องที่มีสีแดงเป็นจำนวนคี่ และตารางนี้ถูกระบายสีครบทุกสี จงหาจำนวนรูปแบบทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการระบายสีตารางตามเงื่อนไขดังกล่าว

23. กำหนดให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{7}{2}$ และเส้นตรง ℓ ไม่ตัดกับพาราโบลา $y = x^2$ กำหนดให้ A และ B เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรง ℓ โดยที่ ส่วนของเส้นตรง AB ยาว 2555 หน่วย จงหาพิกัดของจุด C ที่อยู่บนพาราโบลา $y = x^2$ ซึ่งทำให้สามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่น้อยที่สุด

24. กำหนดให้ $f : [-4, \infty) \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+7x+14}$ จงหาเรนจ์ของฟังก์ชัน f

25. จงหาค่าของ $\left(\dfrac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2555}\right)+\mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2555}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2555}\right)-\mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2555}\right)}\right)^{2555}$ โดยที่ i เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $\mathrm{i}^2=-1$

ตอนที่ 3 ข้อ 26 - 35 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ ข้อละ 4 คะแนน

26. กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกเรียงติดกันที่มากกว่า 1 พจน์ (เช่น $78, 79, 80, 81, 82$) ถ้าผลรวมของพจน์ในทุกพจน์ในลำดับเท่ากับ 2012 แล้ว ค่าของ a_1 เท่ากับเท่าใด

27. ให้ $A = \left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|x^2-2ax-a^2-\frac{3}{4}\right| \leq \text{ ทุก } x \in [0,1]\right\}$
จงหาสมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกของใหญ่สุดของ A

28. มีไม้ขีดไฟ 10 ก้านที่มีความยาว $1, 2, \ldots, 10$ หน่วย ตามลำดับ สุ่มหยิบไม้ขีดมา 3 ก้าน จงหาความน่าจะเป็นที่ไม้ขีดทั้งสามก้านสามารถประกอบเป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านได้

29. ให้ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x(1-x)$ กับแกน x จงหาค่า m ทั้งหมดที่ทำให้เส้นตรง $y = mx$ แบ่ง S เป็น 2 ส่วนโดยที่แต่ละส่วนมีพื้นที่เท่ากัน

30. กำหนดให้ A, B และ C เป็นสับเซตของ $\{1, 2, \ldots, 12\}$ โดยที่ $A \cap B \cap C = \{1\}$, จำนวนสมาชิกของ A, B และ C มีค่าเท่ากัน และสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

    (1) $\forall a \in A \, \exists b \in B, \; a|b$

    (2) $\forall b \in B \, \exists c \in C, \; b|c^2$

    (3) $\forall c \in C \, \exists a \in A, \; c^2|a^3$

    ในบรรดาเซต A ทั้งหมดที่เป็นไปได้ A มีผลบวกของสมาชิกทั้งหมดมากที่สุดเท่ากับเท่าใด

31. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้สมการ
$a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+b\sin x+c\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$ มีคำตอบอย่างน้อยสองค่าในช่วง $(0,\pi)$
จงหาสามสิ่งอันดับ (a,b,c) ทั้งหมดที่เป็นไปได้เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม และ $1<b<5$

32. กำหนดให้ $A = \left\{(2x,2y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \log_x\left(\log_y x\right)>0\right\}$
และ $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|<2555$ และ x และ y เป็นจำนวนเต็ม $\}$
จงหาจำนวนสมาชิกของ $A\cap B$

33. กำหนดให้ x_1 , x_2 , ... , x_n , ... เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนจริงในช่วง $[0,3]$
ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $\frac{x_n}{\sqrt{x_{n+1}+3}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ ทุก $n=1,2,3,\ldots$
ค่าของ x_{2555} ทั้งหมดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าใด

34. สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ กำหนดให้ $[x]$ เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งมีค่าไม่เกิน x
จงหาว่า มีจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดกี่จำนวนซึ่งทำให้ $\sum_{j=1}^{2555} [2^{-j}n] = n-1$

35. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n กำหนดให้
$a_n =$ จำนวนจริงที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้เส้นตรง $y = a_n x$ ตัดกราฟ $y = \sin x$ ทั้งหมด $4n+1$ จุด
จงหาค่าของ $\lim_{n \to \infty} na_n$

<u>เฉลย</u>

1. ข	10. ง	19. 144	28. $\frac{11}{40}$	35. $\frac{1}{2\pi}$
2. ค	11. ง	20. 1024	29. $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	
3. ก	12. ก	21. $y = 8x^2+\frac{1}{16}$	30. 36	
4. ข	13. ค	22. 3024	31. $(-1,\sqrt{2},-1),$	
5. ง	14. ค	23. $(\frac{7}{4},\frac{49}{16})$	$(-2,2\sqrt{2},-2),$	
6. ค	15. ก	24. $[-\frac{2}{7},\frac{3}{2}]$	$(-3,3\sqrt{2},-3)$	
7. ง	16. 8	25. i	32. 1624350	
8. ก	17. 4π	26. 248	33. 3	
9. ง	18. $21, 42$	27. โจทย์ไม่ครบ	34. 2556	

<u>แนวคิด</u>

1. ข

รีแนวนอน $\rightarrow\ a^2-7=\frac{144}{25}+\frac{81}{25}\ \rightarrow\ a^2=16$

2. ค

$B-A=A^c-(A^c\cap B^c)\ \rightarrow\ \frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

3. ก

ได้ $a_1+31d=4a_1+76d\ \rightarrow\ 0=a_1+15d$

$a_{10}+a_{25}+2a_{40}=4a_1+111d=3(a_1+15d)+a_1+66d=a_{67}$

4. ข

$\vec{B}$ ทำมุม 60° กับแกน X บวก ดังนั้น $\vec{A}$ ทำมุม $\cancel{0^\circ}, 120^\circ\ \rightarrow\ a=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$

5. ง

$=\sqrt{\left(x\sqrt{x}+1\right)^2}=\left|x\sqrt{x}+1\right|=x\sqrt{x}+1\ \rightarrow\ f(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x\ \rightarrow\ \frac{2}{5}+1$

6. ค

$3(3^x)^2+2(2^x)-2^x3^x-6(3^x)=0\ \rightarrow\ (3(3^x)-2^x)(3^x-2)\ \rightarrow\ x=\log_{2/3}3\,,\log_3 2$

$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}3}\right)^{\log_3 2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2}=\frac{1}{2}$

7. ง

$\rightarrow\ A^2-2A=2\mathrm{I}_2\ \rightarrow\ (A-\mathrm{I}_2)^2=3\mathrm{I}_2\ \rightarrow\ (\det(A-I_2))^2=9\ \rightarrow$ ตอบ 3

8. ก

$\mathrm{D}_f:\ x^2-1\geq 0$

$\mathrm{D}_g:\ x^2-1\geq 0$ และ $x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$ ถ้าอันแรกจริง อันหลังจะจริงเสมอ ได้ $\mathrm{D}_f=\mathrm{D}_g\ \rightarrow$ 1 ถูก

เนื่องจาก $x-\sqrt{x^2-1}\neq 0$ เอา $\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ คูณ $g(x)$ จะได้เท่า $f(x)$ → 2 ถูก

9. ง

$\frac{1}{2}=\frac{\binom{a}{2}+\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}} \rightarrow (a+b)(a+b-1)=2a(a-1)+2b(b-1)$

$\rightarrow a^2+2ab+b^2-a-b=2a^2-2a+2b^2-2b \rightarrow a+b=a^2-2ab+b^2$

10. ง

$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1 \rightarrow \frac{\pi-1}{2}=x \rightarrow x\approx 1.07$

11. ง

จาก $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ จะได้ $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=1$ จะได้ $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$ และ $\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$ จะได้ $z_1\overline{z_2}=\frac{z_1}{z_2}$ และ $\overline{z_1}z_2=\frac{z_2}{z_1}$

จากสูตรผลบวกผลคูณราก จะได้ $z_1+z_2=-p$ และ $z_1z_2=q$

จาก $z_1\overline{z_2}$ กับ $\overline{z_1}z_2$ เป็นคอนจูเกตกัน จะได้ $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}\right) =$
$\frac{1}{2}\left(\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{z_1z_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{q}-2\right) = \frac{p^2}{2q}-1$

12. ก

(1) ผิด เช่น $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ เป็นอตรรกยะ

(2) ผิด เช่น $1^{\sqrt{2}}=1$ เป็นตรรกยะ

(3) ผิด เช่น $\sqrt{2}^2=2$ เป็นตรรกยะ

(4) ผิด เช่น $\sqrt{2}^{\log_2 9}=3$ เป็นตรรกยะ ($\log_2 9$ เป็นอตรรกยะ เพราะ $\log_2 3$ เป็นอตรรกยะ เพราะ ไม่มีจำนวนเต็ม a,b ที่ $2^a=3^b$)

13. ค

(1) $\mathrm{LHS} = \det(AB-BA) = (-1)^3\det(-BA+AB) = \mathrm{RHS}$ → (1) ถูก

(2) $\mathrm{LHS} = (A+C)(B+D)-(B+D)(A+C) = (AB+AD+CB+CD)-(BA+BC+DA-DC)$ และ $\mathrm{RHS} = AB-BA+CD-DC$ ไม่เท่ากัน → (2) ผิด

(3) $\mathrm{LHS} = [A,BC-CB]+[B,CA-AC]=ABC-\cancel{ACB}-\cancel{BCA}+CBA+\cancel{BCA}-BAC-CAB+\cancel{ACB} = ABC+CBA-BAC-CAB$ และ $\mathrm{RHS} = -[C,AB-BA] = -CAB+CBA+ABC-BAC$ เท่ากัน → (3) ถูก

14. ค

(1) ถ้า $f(x)=\begin{cases}5x & \text{เมื่อ } x\neq 0\\ 1 & \text{เมื่อ } x=0\end{cases}$ จะได้ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{h}=10$ แต่ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ หาค่าไม่ได้ → ผิด

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=5$ แปลว่า $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=5$

ดังนั้น $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h} = 5$

ดังนั้น $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = 5+5 = 10$ → (2) ถูก

15. ก

เนื่องจาก $A+B+C=180^\circ$ ดังนั้น $\sin(A+B)=\sin C$ ดังนั้น $\sin^2 C=\sin^2(A+B)$

จะได้ $\cos^2 A+\cos^2 B \geq \sin^2(A+B)$

$\cos^2 A+\cos^2 B \geq (\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2$

$\cos^2 A+\cos^2 B \geq \sin^2 A\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B+2\sin A\cos B\cos A\sin B$

$\cos^2 A-\cos^2 A\sin^2 B+\cos^2 B-\sin^2 A\cos^2 B \geq 2\sin A\cos B\cos A\sin B$

$\cos^2 A\,(1-\sin^2 B)+\cos^2 B\,(1-\sin^2 A) \geq 2\sin A\cos B\cos A\sin B$

$\cos^2 A\cos^2 B + \cos^2 B\cos^2 A \geq 2\sin A\cos B\cos A\sin B$

$2\cos^2 A\cos^2 B \geq 2\sin A\cos B\cos A\sin B$

$2\cos^2 A\cos^2 B-2\sin A\cos B\cos A\sin B \geq 0$

$2\cos A\cos B\,(\cos A\cos B-\sin A\sin B) \geq 0$

$2\cos A\cos B\cos(A+B) \geq 0$

$2\cos A\cos B\,(-\cos C) \geq 0$

$2\cos A\cos B\cos C \leq 0$

จะได้ cos ทั้งสามมุม เป็นบวกหมดไม่ได้ ไม่งั้นฝั่งซ้ายจะไม่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 0

ดังนั้น จึงเป็นสามเหลี่ยมมุมแหลมไม่ได้

16. 8

แทน $x=10-f(10)$ และแทน $y=10$ ได้ $f\big(10-f(10)+f(10)\big)=10-f(10)+10-4$

ได้ $2f(10)=16 \rightarrow f(10)=8$

17. 4π

$\operatorname{cosec}^2 x-\sec^2 x-\cot^2 x-\tan^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x = -3$

$(\operatorname{cosec}^2 x-\cot^2 x)-(\sec^2 x-\tan^2 x)-(\sin^2 x+\cos^2 x) = -3+2\tan^2 x$

ได้ $\tan^2 x=1 \rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4} \rightarrow$ บวกกันได้ 4π

18. 21 , 42

แทน $a=63-b$ ได้ $\frac{(63-b)^2+b^2}{63}=35 \rightarrow b^2-63b+882=0 \rightarrow b=21\,,42$

19. 144

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\bar{0} \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{LB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}+\overrightarrow{\mathrm{NA}}=\bar{0} \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{LB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{NA}}=0$

ได้ $\overrightarrow{\mathrm{LB}}\,,\overrightarrow{\mathrm{MC}}\,,\overrightarrow{\mathrm{NA}}$ ต่อเป็นสามเหลี่ยม 3, 4, 5 $\rightarrow \cos \mathrm{C\hat{A}B}=\frac{4}{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\bar{0} \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{LC}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}+\overrightarrow{\mathrm{NB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}=\bar{0} \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{LC}}+\overrightarrow{\mathrm{NB}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$

ได้ $\overrightarrow{\mathrm{LC}}\,,\overrightarrow{\mathrm{NB}}\,,\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ ต่อเป็นสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ 3, 4, 5

จากเส้นรอบรูป ได้ $3+4+5+3k+4k+5k=36 \rightarrow k=2$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (15)(12)\left(\frac{4}{5}\right)=144$

20. 1024

จัดเป็นฐาน 2 ได้ $(2^{4x}+2)(2^{4y}+4)(2^{4z}+8) \;=\; 2^{2x+2y+2z+6}$

ดูแล้ว ฝั่งซ้าย มักจะมากกว่าฝั่งขวาเสมอ

เราจะพยายามแยก x, y, z ทางขวา ให้สามารถจับคู่กับฝั่งซ้ายในแบบที่ฝั่งซ้ายมากกว่าเสมอ

จะเห็นว่า ถ้าจัดฝั่งขวาเป็น $\left(2^{2x+\frac{3}{2}}\right)(2^{2y+2})\left(2^{2z+\frac{5}{2}}\right)$ จะจับคู่แต่ละวงเล็บกับทางซ้ายเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้

จะเห็นว่า $2^{4x}-2^{2x+\frac{3}{2}}+2=\left(2^{2x}-\sqrt{2}\right)^2 \geq 0$ ดังนั้น $2^{4x}+2 \geq 2^{2x+\frac{3}{2}}$ เสมอ และเท่ากันเมื่อ $x=\frac{1}{4}$

$2^{4y}-2^{2y+2}+4=(2^{2y}-2)^2 \geq 0$ ดังนั้น $2^{4y}+4 \geq 2^{2y+2}$ เสมอ และเท่ากันเมื่อ $y=\frac{1}{2}$

$2^{4z}-2^{2z+\frac{5}{2}}+8=\left(2^{2z}-\sqrt{8}\right)^2 \geq 0$ ดังนั้น $2^{4y}+8 \geq 2^{2z+\frac{5}{2}}$ เสมอ และเท่ากันเมื่อ $z=\frac{3}{4}$

เนื่องจาก ฝั่งซ้าย $\geq$ ฝั่งขวาแบบคู่ต่อคู่ ดังนั้น จะเท่ากันได้ เมื่อทุกคู่เท่ากันเท่านั้น ตอบ $4^{\frac{2}{4}+\frac{3}{2}+3} \;=\; 1024$

21. $y \;=\; 8x^2+\frac{1}{16}$

จะได้ $x^2=\frac{1}{4}y$ ได้ $\mathrm{F}(0,\frac{1}{16})$ ให้คอร์ด ผ่านจุด $(a, 4a^2)$ และ $(b, 4b^2)$ และ $\mathrm{F}(0,\frac{1}{16})$ ดังนั้น $\frac{4a^2-\frac{1}{16}}{a}=\frac{4b^2-\frac{1}{16}}{b}$

ได้ $4a^2b-\frac{b}{16}-4b^2a+\frac{a}{16}=0 \;\rightarrow\; 4ab(a-b)+\frac{1}{16}(a-b) \;=\; 0$ แต่ $a \neq b$ ดังนั้น $4ab=-\frac{1}{16}$

จุดกึ่งกลาง คือ $(\frac{a+b}{2}, 2a^2+2b^2)$ ให้ $x=\frac{a+b}{2}$ ได้ $2a^2+2b^2 \;=\; 8x^2-4ab \;=\; 8x^2+\frac{1}{16}$

22. 3024

แบ่งกรณีตามจำนวนสีแดง $(1, 3, 5)$ ที่เหลือระบายสองสียังไงก็ได้แล้วหักแบบเหลืองหมดกับดำหมด

ได้ $\binom{8}{1}(2^7-2)+\binom{8}{3}(2^5-2)+\binom{8}{5}(2^3-2) \;=\; 1008+1680+336=3024$

23. $(\frac{7}{4},\frac{49}{16})$

จุดที่อยู่ใกล้ ℓ ที่สุด ก็คือจุดบนพาราโบลาที่มีความชันเส้นสัมผัส $=\frac{7}{2}$

$\rightarrow\; y'=2x=\frac{7}{2}$ ได้ $x=\frac{7}{4} \;\rightarrow\; \mathrm{C}(\frac{7}{4},\frac{49}{16})$

24. $[-\frac{2}{7},\frac{3}{2}]$

$f(x)=1+\frac{-3x-11}{x^2+7x+14} \;\rightarrow$ ตัวส่วน มี $b^2-4ac<0$ ดังนั้น ส่วนไม่มีทางเป็น 0 $\rightarrow$ กราฟต่อเนื่อง

หาค่าสูงสุดต่ำสุด $f'(x)=\frac{(x^2+7x+14)(-3)-(-3x-11)(2x+7)}{(x^2+7x+14)^2}=0 \;\rightarrow\; 3x^2+22x+35=0$

ได้ $(3x+7)(x+5)=0 \;\rightarrow\; x=-\frac{7}{3},\ -5 \;\rightarrow$ มีแต่ $-\frac{7}{3}$ ที่อยู่ใน $[-4,\infty)$

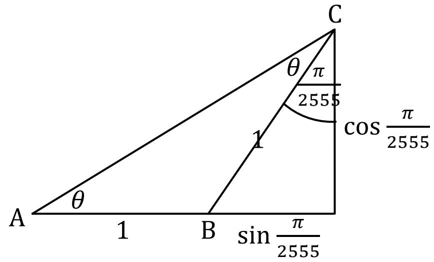
$f\left(-\frac{7}{3}\right)=1+\frac{-4}{\frac{49}{9}-\frac{49}{3}+14}=1+\frac{-4}{5\frac{4}{9}-16\frac{1}{3}+14}=1-\frac{9}{7}=-\frac{2}{7}$

จุดขอบ $f(-4)=1+\frac{1}{2},\ f(\infty)=1+0=1 \;\rightarrow$ เรนจ์ $=[-\frac{2}{7},\frac{3}{2}]$

25. i

ข้างบนกับข้างล่างเป็นคอนจูเกตกัน หารกันได้เป็น $\left(\frac{r\,\mathrm{cis}\,\theta}{r\,\mathrm{cis}(-\theta)}\right)^{2555} = \mathrm{cis}^{2555}\, 2\theta = \mathrm{cis}(2555)(2\theta)$

เมื่อ $\tan\theta = \frac{\cos\frac{\pi}{2555}}{1+\sin\frac{\pi}{2555}}$ วาดได้ดังรูป



จะเห็นว่า AB $=$ BC ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น $2\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2555} = \frac{2553\pi}{2(2555)}$

จะได้ $\mathrm{cis}(2555)(2\theta) = \mathrm{cis}\,\frac{2553\pi}{2} = \mathrm{cis}\;1276\pi + \frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$

26. 248

จะได้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ที่ $d = 1$ ดังนั้น $S_n = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)(1)\big) = 2012$

$$n\big((2a_1 - 1) + n\big) = 4024$$

$$n\big(\text{ เต็มบวกคี่ } + n\big) = 4024$$

จะเห็นว่า n กับ เต็มบวกคี่ $+\,n$ จะมีตัวหนึ่งเป็นคู่ ตัวหนึ่งเป็นคี่เสมอ

และ 4024 เขียนเป็น ผลคูณของเลขคู่กับเลขคี่ ได้แบบเดียว คือ 8×503

ดังนั้น จะได้ $n =$ ตัวน้อย $= 8$ และ เต็มบวกคี่ $+\,n = 503$ จะได้ เต็มบวกคี่ $= 503 - 8 = 495$

ดังนั้น $2a_1 - 1 = 495$ แก้สมการ จะได้ $a_1 = 248$

27. โจทย์ไม่ครบ

28. $\frac{11}{40}$

สามเหลี่ยมมุมป้าน ต้องมี $c^2 > a^2 + b^2$ และเป็นสามเหลี่ยมได้ ต้องมี $a + b > c$ แล้วไล่นับเอา

(2,3,4), (2,4,5), (2,5,6), (2,6,7), (2,7,8), (2,8,9), (2,9,10)

(3,4,6), (3,5,6), (3,5,7), (3,6,7), (3,6,8), (3,7,8), (3,7,9), (3,8,9), (3,8,10), (3,9,10),

(4,5,7), (4,5,8), (4,6,8), (4,6,9), (4,6,10), (4,7,9), (4,8,9), (4,8,10), (4,9,10),

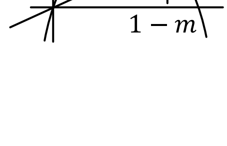
(5,6,8), (5,6,9), (5,6,10), (5,7,9), (5,7,10), (5,8,10)

(6,7,10)

ได้ 33 แบบ ดังนั้น ตอบ $\frac{33}{\binom{10}{3}} = \frac{33}{120} = \frac{11}{40}$

29. $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

หาพิกัด x ของจุดตัด $y = x(1-x)$ กับ $y = mx$ ได้ $x(1-x) = mx$ ได้ $x = 0, 1-m$



พื้นที่เท่า แปลว่า $\int_0^{1-m} x(1-x) - mx\,dx = \int_0^{1-m} mx\,dx + \int_{1-m}^{1} x(1-x)\,dx$

$$\frac{(1-m)^2}{2} - \frac{(1-m)^3}{3} - \frac{m(1-m)^2}{2} = \frac{m(1-m)^2}{2} + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \frac{(1-m)^2}{2} + \frac{(1-m)^3}{3}$$

$$6(1-m)^2 = 6m(1-m)^2 + 1 + 4(1-m)^3$$

$$6 - 12m + 6m^2 = 6m - 12m^2 + 6m^3 + 1 + 4 - 12m + 12m^2 - 4m^3$$

$$0 = 2m^3 - 6m^2 + 6m - 1 = 2(m-1)^3 + 1 \rightarrow m = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

30. 36

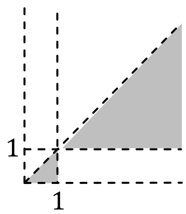
A, B, C จะมี $7, 10, 11$ อยู่ไม่ได้ เพราะไม่งั้นต้องมี $7, 10, 11$ ทั้งสามเซต ขัดกับที่บอกว่า $A \cap B \cap C = \{1\}$
พอเป็น 10 ไม่ได้ ก็จะได้ต่ออีกว่า A, B, C จะมี 5 อยู่ไม่ได้ เพราะไม่มี 10 แล้ว ถ้ามี 5 ก็ต้องมี 5 ทั้งสามเซตด้วย
เหลือ 1 ที่อยู่ทั้ง 3 เซต และ 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 อีก 7 ตัว ที่อยู่ได้อย่างมาก 2 เซต
ดังนั้น $n(A) + n(B) + n(C)$ มีได้มากสุด $= 3(1) + 2(7) = 17$ ตัว
เนื่องจาก $n(A) = n(B) = n(C)$ ดังนั้น $n(A)$ มากสุดได้ $\left\lfloor \frac{17}{3} \right\rfloor = 5$ ตัว
โจทย์ถาม A มากสุด A ต้องมี 1 อยู่ ที่เหลืออีก 4 ตัวลองเอาตัวมากสุดให้ดู ได้ $A = \{1, 12, 9, 8, 6\}$
จะได้ $B = \{1, 12, 9, 8, 2\}$, $C = \{1, 6, 4, 3, 2\}$ สำเร็จ และ A มีแต่ตัวมากสุด จึงไม่มีทางได้มากกว่านี้แล้ว
ได้ผลรวม $= 36$

31. $(-1, \sqrt{2}, -1), (-2, 2\sqrt{2}, -2), (-3, 3\sqrt{2}, -3)$

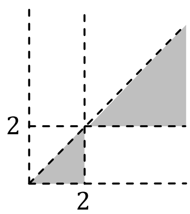
กระจายได้ $\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos x + b \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} c \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} c \cos x = 0$
รวม sin กับ cos ได้ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a + b + \frac{\sqrt{2}}{2} c\right) \sin x + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c\right) \cos x = 0$
ให้ $\frac{\sqrt{2}}{2} a + b + \frac{\sqrt{2}}{2} c = A$ และ $-\frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = B$
กรณี $A^2 + B^2 \neq 0$ เอา $\sqrt{A^2 + B^2}$ หารตลอดได้ $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot \cos x = 0 \rightarrow \sin(x + \theta) = 0$
$x = n\pi - \theta \rightarrow$ เป็นไปไม่ได้ที่จะมี 2 คำตอบ ในช่วง $(0, \pi)$
กรณี $A^2 + B^2 = 0 \rightarrow A = 0$ และ $B = 0$ แก้ระบบสมการให้อยู่ในรูป a ได้ $c = a$ และ $b = -\sqrt{2}a$
ดังนั้น $1 < -\sqrt{2}a < 5$ ได้ $-\frac{1}{\sqrt{2}} > a > -\frac{5}{\sqrt{2}} \rightarrow -0.7 > a > -3.5 \rightarrow a = -1, -2, -3$

32. 1624350

แก้อสมการ $\log_x(\log_y x) > 0$ ก่อน เนื่องจาก x, y เป็นฐาน log ต้อง >0 และ ≠1
เนื่องจาก หลัง log ต้องเป็นบวก $\rightarrow x > 0$ และ $\log_y x > 0$
แก้ $\log_y x > 0$ ต้องแยกคิด กรณี $y < 1$ จะได้ $x < y^0 \rightarrow x < 1$
กรณี $y > 1$ จะได้ $x > y^0 \rightarrow x > 1$
ดังนั้น จะเป็นได้แค่ 2 กรณี คือ $y < 1$ และ $x < 1$ กับ $y > 1$ และ $x > 1$
แก้ $\log_x(\log_y x) > 0$ ตามกรณีที่ได้
กรณี $y < 1$, $x < 1 \rightarrow \log_y x < x^0 \rightarrow x > y^{x^0} \rightarrow x > y$
กรณี $y > 1$, $x > 1 \rightarrow \log_y x > x^0 \rightarrow x > y^{x^0} \rightarrow x > y$
วาดคำตอบของทั้ง 2 กรณี จะได้ดังรูป



เซต A ต้องนำ x, y ไปคูณ 2
กราฟจะขยายจากจุดกำเนิดไปทาง x และ y สองเท่า
ดังนั้น จะได้ เซต A ดังรูป



ถัดมา หา $A \cap B$
เนื่องจาก (x, y) ใน B ต้องเป็นจำนวนเต็ม แต่ในสามเหลี่ยมล่างซ้ายของ A จะไม่มีจำนวนเต็มอยู่เลย

ในสามเหลี่ยมบนขวา จะมีจุดจำนวนเต็มที่และสอดคล้องกับ $|x|+|y|<2555$ โดยแยกนับตามค่า y จะได้ดังนี้

$y=3$: มี $(4,3),(5,3),\ldots,(2551,3)\ \rightarrow\ 2548$ ตัว

$y=4$: มี $(5,4),(6,4),\ldots,(2550,4)\ \rightarrow\ 2546$ ตัว

$y=5$: มี $(6,5),(7,5),\ldots,(2549,5)\ \rightarrow\ 2544$ ตัว

$\vdots$

จะเห็นว่า จำนวนตัว ลดลงทีละ 2 $\rightarrow$ มี $2548+2546+\ldots+2=\frac{1274(2550)}{2}=1624350$

33. 3

จัดรูป ได้ $2x_n^2\ \geq\ 3x_{n+1}+9\ \rightarrow\ \frac{2x_n^2-9}{3}\geq x_{n+1}$

แต่เนื่องจาก $x_n\geq\frac{2x_n^2-9}{3}$ (เพราะจัดรูปได้เป็น $0\geq(x_n-3)(2x_n+3)$ ซึ่งจริงเมื่อ $x_i\in[0,3]$)

ดังนั้น $x_n\geq x_{n+1}$ ซึ่งจะได้ว่า $3\geq x_1\geq x_2\geq x_3\geq\ldots$

เนื่องจาก x_i เป็นลำดับที่ไม่เพิ่มขึ้น และทุกตัวไม่สามารถน้อยกว่า 0 ดังนั้น ลำดับนี้ สามารถหาลิมิตได้

ใส่ลิมิตทั้งสองข้างใน $2x_n^2\ \geq\ 3x_{n+1}+9$ จะได้ $2(\lim_{n\to\infty}x_n)^2\ \geq\ 3(\lim_{n\to\infty}x_{n+1})+9$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}$ ให้สองตัวนี้ $=L$ จะได้ $2L^2\geq 3L+9$

แก้อสมการ ได้ $L\in(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[3,\infty)$ แต่ $x_i\in[0,3]$ ดังนั้น $L=3$

เนื่องจาก $3\geq x_1\geq x_2\geq x_3\geq\ldots$ และ $\lim_{n\to\infty}x_n=3$ จึงสรุปได้ว่า x_i ทุกตัวต้องเป็น 3 หมด

34. 2556

สังเกตว่า ผลบวก $\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\ldots$ อนันต์ตัว จะได้ $\frac{\frac{n}{2}}{1-\frac{1}{2}}\ =\ n$ ดังนั้น $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^{2555}}\right]$ ได้อย่างมาก $n-1$

และมันจะมีค่ามากๆ เมื่อแต่ละตัวไม่ถูกปัดเศษลง นั่นคือ เมื่อ n อยู่ในรูป 2^k

กรณีที่ $k\leq 2555$: ได้ผลบวก $=\ 2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+1+0+0+\ldots$ (จนครบ 255 ตัว)

$$=\ \frac{1-2^{k-1}(2)}{1-2}\ =\ 2^k-1\ =\ n-1 \text{ ตามที่โจทย์ต้องการ}$$

กรณีที่ $k>2555$: ผลบวกจะบวกไปไม่ถึง 1 จึงได้ค่าน้อยกว่า $n-1$

กรณีที่ n ไม่อยู่ในรูป 2^k จะสามารถเขียน $n=2^k+m$ โดยที่ $m<2^k$ ได้

ได้ผลบวก $=\ \left[\frac{2^k+m}{2}\right]+\left[\frac{2^k+m}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{2^k+m}{2^{2555}}\right]\ =\ 2^{k-1}+\left[\frac{m}{2}\right]+2^{k-2}+\left[\frac{m}{4}\right]+\ldots+$ ไป 2555 ตัว

แต่ $2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots$ เป็นได้อย่างมาก 2^k-1 และ $\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m}{4}\right]+\ldots$ เป็นได้อย่างมาก $m-1$

จึงไม่มีทางที่จะได้ผลบวกเป็น 2^k+m-1 ดังนั้น ถ้า n ไม่อยู่ในรูป 2^k จะไม่มีทางได้ผลบวกเป็น $n-1$

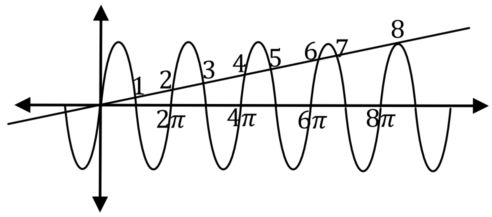
นั่นคือ n ต้องอยู่ในรูป 2^k โดยที่ $k\leq 2555\ \rightarrow\ k=0,1,\ldots,2555$ ได้ 2556 ตัว

35. $\frac{1}{2\pi}$

กราฟ $y = \sin x$ กับ $y = a_n x$ ต่างก็สมมาตรรอบจุดกำเนิด ต้องการ a_n มากสุด จะหา a_n ที่เป็นบวกดูก่อน

ตัด $4n + 1$ จุด แปลว่าตัดจุดกำเนิด 1 จุด กับจตุภาคที่ 1 กับ 3 อย่างละ $2n$ จุด

เช่นในรูป จะเป็นกรณี $n = 4$



ถ้าให้จุดตัดสุดท้ายที่เป็นจุดสัมผัส มีพิกัดคือ $(\theta_n, \sin\theta_n)$

จะได้ $a_n =$ ความชันระหว่าง $(0, 0)$ กับ $(\theta_n, \sin\theta_n)$ $= \frac{\sin\theta_n}{\theta_n}$

จากรูป จะเห็นว่า เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ $\sin\theta_n$ เข้าใกล้ 1 และ θ_n เข้าใกล้ $2n\pi + \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = n \cdot \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi}$

<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ คุณ อาร์ท (passer-by) และ คุณ Chonlatit Songchumsai สำหรับเฉลยข้อ 33

ขอบคุณ คุณ วี พรา ที่ช่วยตรวจความถูกต้องของเฉลย